502

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

Djurdjica Takači
Arpad Takači

ZBIRKA ZADATAKA IZ ANALIZE I

prvi deo

Granica, neprekidnost, izvod

Nenad Djapić

Ispitni zadaci

РЕПУБЛИКА СРПСКА
Природно-математички
факултет Бања Лука
Математика-Информатика

Novi Sad, 1997.

ZBIRKA ZADATAKA IZ ANALIZE I, prvi deo
četvrto dopunjeno i izmenjeno izdanje
Institut za matematiku PMF-a
Novi Sad 1997

РЕПУБЛИКА СРПСКА
Природно-математички
факултет Бања Лука
Математика-Информатика

Инвентарски број 2760
Сигнатура

Autori:

Dr Djurdjica Takači, redovni profesor
Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Dr Arpad Takači, redovni profesor
Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Recenzenti:

Dr Endre Pap, redovni profesor
Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Dr Ljiljana Gajić, redovni profesor
Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Štampanje ove knjige je odobreno na sednici Veća Instituta za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, dana 30.9.1997. godine.

Štampa: "MALA KNJIGA", Novi Sad

Predgovor četvrtom dopunjenom i preradjenom izdanju

Predmet *Realne funkcije realne promenljive* (kraće *Analiza I*) je osnova svih ostalih znanja iz matematičke analize, i kao takav se u većem ili manjem obimu predaje na prvoj godini studija na svim prirodno-matematičkim, tehničkim, tehnološkim i njima srodnim fakultetima. Davno je uočeno da studenti često imaju ozbiljnih teškoća kod savladavanja gradiva iz Analize I, što zbog nedovoljnog znanja koje su poneli iz srednje škole, što zbog objektivne težine ovog predmeta. Zbog toga se pojavila potreba za pisanje zbirke koja bi omogućila lakše savladavanje pojmova, razumevanje dokaza i rešavanje zadataka iz Analize I.

Prvo izdanje zbirke iz Analize I, prvi deo, je izdat 1989. godine. Zbirka je bila dobro prihvaćena od relativno širokog kruga čitalaca. Naime, za nepunih osam godina, zbirka je već imala tri rasprodata izdanja, što dovoljno govori da su je koristili ne samo studenti matematike i informatike PMF-a za koje je prevashodno bila pisana.

Knjiga koju čitalac ima pred sobom, prati koncepciju prethodnih izdanja, ali je i dobar deo prethodnog sadržaja promenjen. Naime, u ovom izdanju su mnogi ranije davani zadaci izostavljeni ili zamenjeni (npr. poglavlje o Dedekindovim presecima), a ubačen je veći broj zadataka koji su zadnjih godina davani na pismenim ispitima iz Analize I za studente informatike. Taj deo je obradio mr Nenad Djapić, asistent na Institutu za matematiku PMF-a u Novom Sadu. Naravno, ispravljene su i primećene greške ili nepreciznosti koje su postojale u ranijim izdanjima.

Zbirka je podeljena u sedam glava. Svaka glava počinje sa kratkim pregledom pojmova i tvrdjenja koja su potrebna u toj glavi. Posle toga dati su zadaci i to poredjani po srodnosti i po težini. Najveći broj zadataka je detaljno uradjen, iako preporučujemo čitaocima da data rešenja koriste tek posle pokušaja rešavanja. Grafici funkcija su većinom izradjeni pomoću programa ”Scientific WorkPlace” firme ”TCI Software” iz Novog Meksika. Deo zadataka je originalan, a neki su varijacija zadataka iz standardnih udžbenika i zbirki iz Analize I.

Prijatna nam je dužnost da se zahvalimo dr Endre Papu i dr Ljiljani Gajić, redovnim profesorima PMF–a u Novom Sadu, na pažljivom čitanju rukopisa, i korisnim primedbama i savetima koji su doprineli boljem kvalitetu zbirke. Takodje se zahvaljujemo svim ostalim kolegama koji su nam predložili izvestan broj zadataka ili ukazali na greške u ranijim izdanjima. Na kraju, zahvaljujemo se Institutu za matematiku Prirodno–matematičkog fakulteta u Novom Sadu što nam je omogućio korišćenje svoje opreme u toku rada na ovoj knjizi.

Novi Sad, septembra 1997. Autori

Sadržaj

Predgovor i

Sadržaj iii

1 Uvod 1
- 1.1 Skupovi 1
  - 1.1.1 Zadaci 3
- 1.2 Matematička indukcija 5
  - 1.2.1 Zadaci 5
- 1.3 Apsolutna vrednost 14
  - 1.3.1 Zadaci 14
- 1.4 Skup R kao potpuno uredjeno polje 16
  - 1.4.1 Zadaci 19
- 1.5 Skup R kao topološki prostor 28
  - 1.5.1 Zadaci 30

2 Funkcije 37
- 2.1 Osnovni pojmovi 37
  - 2.1.1 Zadaci 40

3 Nizovi 57
- 3.1 Granična vrednost niza 57
  - 3.1.1 Zadaci 58
- 3.2 Osobine konvergentnih nizova 62
  - 3.2.1 Zadaci 63
- 3.3 Košijevi nizovi 73
  - 3.3.1 Zadaci 73
- 3.4 Tačke nagomilavanja i podnizovi 75
  - 3.4.1 Zadaci 76
- 3.5 Monotoni nizovi 86

3.5.1 Zadaci 86
3.6 Razni zadaci 99
3.7 Asimptotsko ponašanje 105
3.7.1 Zadaci 106

4 Granična vrednost funkcije **111**
4.1 Granica 111
4.1.1 Zadaci 113
4.2 Asimptote grafika funkcija 141
4.2.1 Zadaci 142
4.3 Asimptotsko ponašanje 145
4.3.1 Zadaci 145

5 Neprekidnost funkcije **151**
5.1 Neprekidnost funkcije u tački 151
5.1.1 Zadaci 153
5.2 Uniformna neprekidnost 174
5.2.1 Zadaci 175

6 Izvodi **183**
6.1 Uvod 183
6.1.1 Zadaci 187
6.2 Teoreme srednje vrednosti 212
6.2.1 Zadaci 213
6.3 Tejlorova formula 221
6.3.1 Zadaci 222
6.4 Lopitalovo pravilo 230
6.4.1 Zadaci 230
6.5 Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije 238
6.5.1 Zadaci 239
6.6 Konveksnost i konkavnost 246
6.6.1 Zadaci 247
6.7 Grafici funkcija 252

7 Ispitni zadaci **269**

Literatura **307**

Indeks **309**

Glava 1

Uvod

1.1 Skupovi

Skup je osnovni pojam u matematici. Skupovi se obeležavaju velikim slovima latinice, na primer $A, B, C, \ldots, X, Y, \ldots$. Skup je poznat ako je poznato pravilo, ograničenje ili osobina na osnovu koje možemo odrediti sve njegove elemente. Elemente skupa obeležavamo malim slovima latinice, na primer $a, b, c, \ldots, x, y, \ldots$. Ako element x pripada (resp. ne pripada) skupu X, to pišemo $x \in X$ (resp. $x \notin X$). Ako element x ima osobinu P, tada to označavamo sa $P(x)$. Skup elemenata x sa osobinom P pišemo $\{x|\, P(x)\}$.

Skup X je **podskup** skupa Y, što pišemo $X \subset Y$, ako svaki element skupa X pripada skupu Y, tj.

$$X \subset Y \iff (\forall x)\ x \in X \Rightarrow x \in Y.$$

Prazan skup $\emptyset$, tj. skup koji nema elemenata, se može definisati kao $\emptyset = \{x|\ x \neq x\}$. Za proizvoljan skup X važi da je prazan skup njegov podskup. Ako je $X \subset Y$ i $Y \subset X$, tada kažemo da su X i Y **jednaki skupovi** i pišemo

$$X = Y \iff (\forall x)\ (x \in X \iff x \in Y).$$

Za nas će najvažniji biti skupovi brojeva: $\mathbb{N}$ (skup prirodnih brojeva), $\mathbb{Z}$ (skup celih brojeva), $\mathbb{Q}$ (skup racionalnih brojeva), $\mathbb{R}$ (skup realnih brojeva) i $\mathbb{C}$ (skup kompleksnih brojeva), za koje važi

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

Osnovne operacije sa skupovima su:

- **unija skupova:** $X \cup Y = \{x|\, x \in X \bigvee x \in Y\}$;
- **presek skupova** $X \cap Y = \{x|\, x \in X \bigwedge x \in Y\}$;
- **razlika skupova** $X \setminus Y = \{x|\, x \in X \bigvee x \notin Y\}$;

- **komplement skupa** $CX = \{x | x \in \mathcal{U} \bigvee x \notin X\}$,

gde je $\mathcal{U}$ univerzalni skup koji ima osobinu da za sve skupove X, sa kojima radimo, važi $X \subset \mathcal{U}$. Ako je $X \cap Y = \emptyset$, tada kažemo da su skupovi X i Y disjunktni.

Neka su dati neprazni skupovi X i Y. Tada je **uredjeni par** (x, y) elemenata $x \in X$ i $y \in Y$ definisan kao skup sa dva elementa na sledeći način:

$$(x, y) = \Big\{\{x\}, \{x, y\}\Big\}$$

Dekartov proizvod skupova X i Y, u oznaci $X \times Y$, je skup svih uredjenih parova (x, y), gde je $x \in X$ i $y \in Y$, tj.

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\},$$

Kažemo da se izmedju skupova X i Y može uspostaviti **uzajamno jednoznačno preslikavanje** ako svakom elementu skupa X odgovara jedan i samo jedan element skupa Y i, obrnuto, svakom elementu skupa Y odgovara jedan i samo jedan element skupa X. U tom slučaju kažemo da su skupovi X i Y **ekvivalentni**, što pišemo $X \sim Y$.

Skup X je **konačan** ako postoji takvo $n \in \mathrm{N}$ da je $X \sim \{1, 2, \ldots, n\}$. Skup koji nije konačan je **beskonačan**. Skup X **je prebrojiv** ako je $X \sim \mathrm{N}$. Svi skupovi brojeva u (1.1) su beskonačni, skupovi N, Z, i Q su prebrojivi, a skupovi R i C nisu prebrojivi.

Definicija 1.1. **Relacija** *ρ na nepraznom skupu X je podskup skupa $X \times X$, tj. elementi ρ su uredjeni parovi čiji su i prvi i drugi element iz skupa X.*

Ako uredjeni par $(x, y) \in X \times X$ pripada skupu $\rho \subset X \times X$, tada pišemo $x\rho y$ i kažemo da su x i y u relaciji ρ. Relacija ρ može imati i neke od sledećih važnih osobina:

- refleksivnost: $(\forall x \in X) \quad x\rho x;$
- simetričnost: $(\forall x, y \in X) \quad x\rho y \Rightarrow y\rho x;$
- antisimetričnost: $(\forall x, y \in X) \quad x\rho y \bigwedge y\rho x \Rightarrow x = y;$
- tranzitivnost: $(\forall x, y, z \in A) \quad x\rho y \bigwedge x\rho z \Rightarrow x\rho z.$

Relacija ρ na skupu A je **relacija ekvivalencije** ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Relacija ρ na skupu X je **relacija poretka** ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

U svim skupovima brojeva, jednakost $(=)$ je relacija ekvivalencije. Takodje je kongruencija po modulu m za proizvoljno $m \in \mathrm{N}$ relacija ekvivalencija na N.

U skupu realnih brojeva R, relacije *manje ili jednako* $(\leq)$ i *veće ili jednako* $(\geq)$ su relacije poretka. Ako je istovremeno $x \leq y$ i $x \neq y$, tada pišemo $x < y$ ili, ekvivalentno, $y > x$.

1.1.1 Zadaci

1.1. *Pokazati sledeće osobine operacija sa skupovima:*

- *zakon idempotencije:* $X \cup X = X, \quad X \cap X = X;$
- *zakon komutacije:* $X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cap Y = Y \cap X;$
- *zakon asocijacije:* $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) \quad (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z);$
- *zakoni distribucije:* $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z),$
  $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z);$
- *zakon apsorpcije:* $X \cap (X \cup Y) = X, \quad X \cup (X \cap Y) = X;$
- $X \cup \emptyset = X, \quad X \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}, \quad X \cap \emptyset = \emptyset, \quad X \cap \mathcal{U} = X;$
- $X \cup CX = \mathcal{U}, \quad X \cap CX = \emptyset;$
- *De Morganovi zakoni:* $C(X \cup Y) = CX \cap CY, \quad C(X \cap Y) = CX \cup CY.$

Sa $\mathcal{U}$ je označen univerzalni skup.

Rešenja. Pokazaćemo drugi De Morganov zakon:

$$\begin{aligned} x \in C(X \cap Y) \quad &\Longleftrightarrow \quad x \notin X \cap Y \Longleftrightarrow x \notin X \bigvee x \notin Y \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in CX \bigvee x \in CY \Longleftrightarrow x \in (CX \cup CY). \end{aligned}$$

1.2. *Dati su skupovi:*

a) $A = \{x | \; 0 < x < 3\}; \quad B = \{x | \; 2 \leq x \leq 4\};$

b) $A = \{x | \; x^2 - 4x < 0\}; \quad B = \{x | \; x^2 - 5x + 4 \geq 0\}.$

Odrediti skupove $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

Rezultati.

a) $A \cup B = \{x | \; 0 < x \leq 4\}; \quad A \cap B = \{x | \; 2 \leq x < 3\};$
$A \setminus B = \{x | \; 0 < x < 2\}; \quad B \setminus A = \{x | \; 3 \leq x \leq 4\}.$

b) Pošto je $A = \{x | \; 0 < x < 4\}$ i $B = C \cup D$, gde je $C = \{x | -\infty < x \leq 1\}$ i $D = \{x | \; 4 \leq x < \infty\}$, to je

$$A \cup B = A \cup (C \cup D) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R},$$

$$A \cap B = A \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cup D) = \{x \mid 0 < x < 1\},$$

$$A \setminus B = A \setminus (C \cup D) = \{x \mid 1 < x < 4\}.$$

1.3. *Pokazati sledeća tvrdjenja.*

a) *Skup parnih, skup neparnih prirodnih brojeva i skup celih brojeva* $\mathbb{Z}$ *su prebrojivi skupovi.*

b) *Skup racionalnih brojeva intervala* $(0,1]$ *i skup racionalnih brojeva* $\mathbb{Q}$ *su prebrojivi skupovi.*

c) *Skup realnih brojeva iz intervala* $(0,1)$ *i skup svih realnih brojeva* $\mathbb{R}$ *nisu prebrojivi skupovi.*

Rešenja.

b) Napišimo sve racionalne brojeve iz intervala $(0,1]$ kao

$$\frac{1}{1}, \qquad \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \qquad \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \qquad \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4},$$

i izvršimo preslikavanje

$$1 \leftrightarrow \frac{1}{1}, \quad 2 \leftrightarrow \frac{1}{2}, \quad 3 \leftrightarrow \frac{1}{3}, \quad 4 \leftrightarrow \frac{2}{3}, \quad 5 \leftrightarrow \frac{1}{4}, \quad \ldots,$$

(Svakom prirodnom broju dodelili smo jedan i samo jedan racionalan broj – brojevi koji se ponavljaju uzeti su samo jedanput.)

c) Pretpostavićemo suprotno, tj. da je skup $(0,1)$ prebrojiv. Tada se može svakom prirodnom broju dodeliti tačno jedan realan broj iz intervala $(0,1)$. Za dato $n \in \mathbb{N}$ neka odgovara decimalni broj $0,d_{n1}d_{n2}\ldots d_{nn}\ldots$ iz intervala $(0,1)$. Posmatrajmo u svakom od ovih brojeva cifru d_{nn} i odredimo cifre a_n na sledeći način:

$$a_n = \begin{cases} 0, & a_{nn} = 1 \\ 1, & a_{nn} \neq 1. \end{cases}$$

Sada se broj $a = 0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$ razlikuje od svakog prethodnog realnog broja bar u jednoj decimali, što je u kontradikciji sa pretpostavkom o ekvivalenciji skupova $\mathbb{N}$ i $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

1.2 Matematička indukcija

U skupu prirodnih brojeva važi **princip matematičke indukcije:**

Neka je X *podskup skupa prirodnih brojeva koji sadrži broj 1 i za svaki element* $n \in X$ *važi* $(n+1) \in X$, *Tada je* $X = \mathbb{N}$, *tj. skup* X *se poklapa sa skupom prirodnih brojeva* $\mathbb{R}$.

Princip matematičke indukcije koristimo za dokaz raznih formula koje važe za sve prirodne brojeve počev od nekog, najčešce od broja 1. Taj postupak dokazivanja se sastoji iz tri dela:

1) **dokaz** da je formula tačna za $n = 1$, (ili za neko početno $n_0 > 1$);

2) **pretpostavka** da je formula tačna za $n = m$;

3) **dokaz** da je formula tada tačna za $n = m + 1$.

Na osnovu principa matematičke indukcije sada sledi da je skup onih vrednost koje zadovoljavaju dato tvrdjenje u stvari skup svih prirodnih brojeva, (eventualno počev od nekog n_0).

1.2.1 Zadaci

1.4. *Koristeći princip matematičke indukcije, dokazati tačnost sledećih formula za sve* $n \in \mathbb{N}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$; b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$;

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

Rešenja.

c) Za $n = 1$ formula je tačna jer je $1 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$. Pod pretpostavkom da je formula tačna za $n = m \in \mathbb{N}$, tj. $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$, treba da pokažemo da je ona tačna i za $n = m + 1$. Zaista, imamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 \\ &= \frac{m+1}{6}(2m^2 + 7m + 6) = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} \end{aligned}$$

1.5. *Dokazati tačnost sledećih formula za svako $n \in \mathbb{N}$*

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2; \qquad \text{b)}\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1};$$

$$\text{c)}\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\cdots(k+r)} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}\right), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Rešenja.

a) Formula je tačna za $n = 1$. Ako je tačna za $n = m$ $(m \in \mathbb{N})$, tada je

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3 = \left(\sum_{k=1}^{m} k\right)^2 + \left(2\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)(m+1) + (m+1)^2\right)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} k\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{m} k\right)(m+1) + (m+1)^2 = \left(\sum_{k=1}^{m} k + (m+1)\right)^2.\end{aligned}$$

b) Za $n = 1$ imamo jednakost $\dfrac{1}{1\cdot 3} = \dfrac{1}{2\cdot 1+1}$. Ako pretpostavimo da je formula tačna za $n = m$, tada je

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \frac{m}{2m+1} + \frac{1}{(2m+1)(2m+3)}\\ &= \frac{m(2m+3)+1}{(2m+1)(2m+3)} = \frac{(m+1)(2m+1)}{(2m+1)(2m+3)} = \frac{m+1}{2m+3}.\end{aligned}$$

1.6. *Pokazati da je zbir prvih n članova geometrijske progresije sa količnikom q dat sa*

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}, \quad q \neq 1. \tag{1.2}$$

Rešenje. Za $n = 1$ data formula postaje $q^0 = \dfrac{q-1}{q-1}$, što je tačno.

Pod pretpostavkom da je formula (1.2) tačna za neko $n = m$, treba pokazati da je ona tačna i za $n = m+1$. U tom cilju imamo

$$\sum_{k=1}^{m+1} q^{k-1} = \frac{q^m - 1}{q-1} + q^m = \frac{q^m - 1 + q^{m+1} - q^m}{q-1}.$$

Prema tome je $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} q^{k-1} = \frac{q^{m+1}-1}{q-1}$.

1.7. *Pokazati da je za svako $n \in \mathbb{N}$*

a) *broj $5\cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ deljiv sa 19;*

b) $\underbrace{3 + 33 + 333 + \cdots + 33\ldots3}_{n\ \text{sabiraka}} = \dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$.

Rešenje.

a) Pošto je $5\cdot 2 + 3^2 = 19$, tvrdjenje je tačno za $n = 1$. Pod pretpostavkom da je broj $5\cdot 2^{3m-2} + 3^{3m-1}$ deljiv sa 19, imamo

$$\begin{aligned}5\cdot 2^{3(m+1)-2} + 3^{3(m+1)-1} &= 8\cdot 5\cdot 2^{3m-2} + 27\cdot 3^{3m-1}\\ &= 8(5\cdot 2^{3m-2} + 3^{3m-1}) + 19\cdot 3^{3m-1}\end{aligned}$$

Prvi sabirak je deljiv sa 19 po pretpostavci, a drugi sadrži faktor 19.

b) Za $n = 1$ data formula postaje $3 = \dfrac{10^2 - 9\cdot 1 - 10}{27}$, što znači da je tačna. Pod pretpostavkom da je data formula tačna za neko $n = m$, dobijamo

$$\begin{aligned}\underbrace{3 + 33 + 333 + \cdots + 33\ldots3}_{m+1\ \text{sabirak}} &= \frac{10^{m+1} - 9m - 10}{27} + \underbrace{33\ldots3}_{m+1\ \text{cifra}}\\ &= \frac{1}{27}\cdot\left(10^{m+1} - 9m - 10 + 3\cdot 27\cdot(10^m + \cdots + 10^1 + 10^0)\right)\\ &= \frac{1}{27\cdot 9}\cdot\left(9\cdot 10^{m+1} - 81m - 90 + 81\cdot 10^{m+1} - 81\right)\\ &= \frac{1}{27\cdot 9}\cdot 9\cdot\left(10^{m+2} - 9(m+1) - 10\right)\end{aligned}$$

1.8. *Pokazati jednakost*

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rešenje. Za $n = 1$ formula je tačna. Pod pretpostavkom da je tačna za $n = m$ imamo

$$\begin{aligned}&\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \cdots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2m^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2(m+1)^2} =\\ &= \operatorname{arctg}\frac{m}{m+1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2(m+1)^2}\\ &= \operatorname{arctg}\frac{\dfrac{m}{m+1} + \dfrac{1}{2(m+1)^2}}{1 - \dfrac{m}{m=1}\cdot\dfrac{1}{2(m+1)^2}} = \operatorname{arctg}\frac{m+1}{m+2}\end{aligned}$$

1.9. *Binomni koeficient* $\binom{n}{k}$, $n \in \mathrm{N}$, $k \in \mathrm{N}_0$, $0 \le k \le n$, *definiše se kao*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad (\textit{Po definiciji je} \quad 0! = 1.).$$

a) *Dokazati sledeću formulu za binomne koeficiente:*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}, \quad n \in \mathrm{N},\ k \in \mathrm{N}_0,\ 0 \le k \le n-1.$$

b) *Dokazati* **binomnu formulu**:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad a, b \in \mathrm{R},\ n \in \mathrm{N}. \tag{1.3}$$

Rešenja. b) Za $n = 1$ formula (1.3) je tačna:

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^{1-0} b^{1-1} + \binom{1}{1} a^{1-1} b^{1-0} = a + b.$$

Pod pretpostavkom da je formula (1.3) tačna za neko $n = m$, na osnovu a) dobijamo

$$(a+b)^{m+1} = \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k \right) (a+b)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^{k+1}$$

$$= \binom{m}{0} a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right) a^{m-k+1} b^k + \binom{m}{m} b^{m+1}$$

$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} a^{m-k+1} b^k + b^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{m-k+1} b^k.$$

1.10. *Pokazati da su sledeće formule tačne:*

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(k\alpha) = \frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2} \cdot \sin\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \notin \{2\pi\ell \mid \ell \in \mathrm{Z}\};$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\alpha) = \frac{\cos\dfrac{n\alpha}{2} \cdot \cos\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \notin \{2\pi\ell \mid \ell \in \mathrm{Z}\};$

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin\dfrac{x}{2^n}}, \quad 0 < x < \pi.$

Rešenje.

a) Za $n = 1$ data formula postaje $\sin\alpha = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2} \sin\dfrac{2\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, što je tačno. Pod pretpostavkom da je formula tačna za $n = m$, pokažimo da je tačna i za $n = m+1$:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \sin(k\alpha) = \frac{\sin\dfrac{m\alpha}{2} \ \sin\dfrac{(m+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} + \sin((m+1)\alpha)$$

$$= \sin\frac{(m+1)\alpha}{2} \cdot \left(\frac{\sin\dfrac{m\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} + 2\cos\frac{(m+1)\alpha}{2} \right)$$

$$= \frac{\sin\dfrac{(m+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} \left(\sin\frac{(m+1)\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{(m+1)\alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2} \right)$$

c) Za $n = 1$ data formula postaje $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{2^1 \sin\dfrac{x}{2^1}}$. Pretpostavimo da je formula tačna za $n = m$. Tada imamo

$$\prod_{k=1}^{m+1} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^m \sin\dfrac{x}{2^m}} \cdot \cos\frac{x}{2^{m+1}}$$

$$= \frac{\sin x \cdot \cos\dfrac{x}{2^{m+1}}}{2^m \cdot 2\cos\dfrac{x}{2^{m+1}} \cdot \sin\dfrac{x}{2^{m+1}}} = \frac{\sin x}{2^{m+1} \cdot \sin\dfrac{x}{2^{m+1}}}$$

1.11. *Pokazati sledeće nejednakosti za* $n \in \mathrm{N}$:

a) $(1+x)^n \ge 1 + nx$, $x > -1$ **(Bernulijeva nejednakost)**;

b) $(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \ge 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ *(uopštena Bernulijeva nejednakost), gde je* $x_k > -1$, $k = 1, \ldots, n$, *i svi* x_k *su istog znaka;*

c) $n! < \left(\dfrac{n+1}{2} \right)^n$, $n > 1$.

Rešenja.

a) Za $n = 1$ imamo $(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za $n = m$, tj. $(1+x)^m \geq 1 + mx$ i pokažimo da je onda ona tačna za $n = m+1$ i $x > -1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{m+1} &= (1+x)(1+x)^m \geq (1+x)(1+mx)\\ &= 1 + (m+1)x + mx^2 \geq 1 + (m+1)x.\end{aligned}$$

b) Za $n = 1$ nejenakost je očevidna. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za $n = m$. Tada je zbog uslova $x_i x_j > 0$, $i, j = 1, 2, \ldots n$.

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_m)\cdot(1+x_{m+1})\\ &\geq (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_m)\cdot(1+x_{m+1})\\ &= 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} + (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_m)\cdot x_{m+1}\\ &\geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1}.\end{aligned}$$

c) Za $n = 2$ data nejednakost postaje $2! < \left(\frac{2+1}{2}\right)^2$, što je tačno. Pod pretpostavkom da je nejednakost tačna za $n = m$, važi

$$\begin{aligned}(m+1)! &= (m+1)\cdot m! < (m+1)\left(\frac{m+1}{2}\right)^m\\ &= 2\cdot\left(\frac{m+2}{2}\right)^{m+1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}.\end{aligned}$$

Iz Bernulijeve nejednakosti sledi

$$\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} \geq 1 + (m+1)\cdot\frac{1}{m+1} = 2,$$

pa je

$$(m+1)! < 2\cdot\left(\frac{m+2}{2}\right)^{m+1}\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{m+2}{2}\right)^{m+1}$$

1.12. *Pokazati sledeće nejednakosti:*

a) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$, *gde je* $x_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$,
i $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$, $n \in \mathrm{N}$;

b) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$;

c) $\sqrt{n} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $n \in \mathrm{N}$, $n \geq 2$.

Rešenja.

a) Za $n = 1$ tvrdjene je trivijalno. Neka je data nejednakost tačna za bilo kojih m pozitivnih brojeva čiji je proizvod jednak 1. Tada za $m+1$ pozitivnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}$, čiji je proizvod jednak 1, važi jedan od sledećih uslova.

- Sve vrednosti x_k, $k = 1, \ldots m+1$ jednake su 1; tada je za $n = m+1$ nejednakost očigledna.
- Bar jedan od $m+1$ brojeva je manji od 1; neka je, na primer, $x_m < 1$. Tada je bar jedan od preostalih m brojeva veći od 1; neka je, na primer, $x_{m+1} > 1$. Tada m brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m \cdot x_{m+1}$ zadovoljava induktivnu pretpostavku, pa je
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{m-1} + x_m \cdot x_{m+1} \geq m,$$
odakle je
$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} &\geq m - x_m \cdot x_{m+1} + x_m + x_{m+1}\\ &= m + 1 + x_m(1 - x_{m+1}) + x_{m+1} - 1\\ &= m + 1 + (1 - x_m)(x_{m+1} - 1).\end{aligned}$$
Kako je po pretpostavci $1 - x_m > 0$ i $x_{m+1} - 1 > 0$, to imamo
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} \geq m + 1.$$

c) Za $n = 2$ imamo $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$, što je tačno zbog $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. Neka je formula tačna za $n = m$. Tada možemo pisati

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} > \sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m+1}}.$$

Ako pokažemo da je izraz

$$\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} - \sqrt{m+1} \qquad (1.4)$$

pozitivan, tada leva strana nejednakosti sledi po principu matematičke indukcije. Za izraz u (1.4) važi

$$\begin{aligned}\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}-\sqrt{m+1} &= \frac{\sqrt{m(m+1)}+1-(m+1)}{\sqrt{m+1}}\\ &= \frac{\sqrt{m(m+1)}-m}{\sqrt{m+1}}>0.\end{aligned}$$

Desna strana nejednakosti date formule na osnovu induktivne pretpostavke je $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{m}}<2\sqrt{m}$, što daje

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}<2\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m+1}}.$$

Tvrdjenje sada sledi iz nejednakosti

$$\frac{2\sqrt{m(m+1)}+1}{\sqrt{m+1}}-2\sqrt{m+1}=\frac{2\sqrt{m(m+1)}+1-2m-2}{\sqrt{m+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{4m^2+4m}-\sqrt{4m^2+4m+1}}{\sqrt{m+1}}<0.$$

1.13. *Izrazi*

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}(x_1,x_2,\ldots,x_n):=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\quad x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbf{R},$$

$$\mathcal{G} := \mathcal{G}(x_1,x_2,\ldots,x_n):=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n},\quad x_1,x_2,\ldots,x_n\geq 0,$$

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}(x_1,x_2,\ldots,x_n):=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}},\quad x_1,x_2,\ldots,x_n>0,$$

predstavljaju respektivno aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu brojeva x_1, $x_2,\ldots,x_n$. Pokazati sledeće nejedankosti:

a) $$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n},\quad x_1,x_2,\ldots,x_n\geq 0;$$

b) $$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}},\quad x_1,x_2,\ldots,x_n>0.$$

Primedba. Nejednakosti a) i b) predstavljaju vezu izmedju aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine $\mathcal{A}\geq\mathcal{G}\geq\mathcal{H}$ za $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$. Specijalno je za $n=2$ $\mathcal{A}\cdot\mathcal{H}=\mathcal{G}^2$.

Primetimo da jednakosti u a) i b) imamo samo u slučaju kada je $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

Rešenja. a) Za $n=2$ imamo $\frac{x_1+x_2}{2}-\sqrt{x_1x_2}=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}{2}\geq 0$. Pretpostavimo da je nejednakost tačna za $n=m>2$. Tada

$$\begin{aligned}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m+x_{m+1}}{m+1} &= \frac{m\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}+x_{m+1}}{m+1}\\ &\geq \frac{m\sqrt[m]{x_1\cdot x_2\cdots x_m}+x_{m+1}}{m+1}.\end{aligned}$$

Prema tome je

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m+x_{m+1}}{m+1}-\sqrt[m+1]{x_1\cdot x_2\cdots x_{m+1}}$$

$$\geq\frac{m\sqrt[m]{x_1\cdot x_2\cdots x_m}+x_{m+1}}{m+1}-\sqrt[m+1]{x_1\cdot x_2\cdots x_{m+1}}.$$

Ako označimo sa $p^{m(m+1)}:=x_1\cdot x_2\cdots x_m$ i $q^{m+1}:=x_{m+1}$, dobijamo

$$\frac{m\sqrt[m]{x_1\cdot x_2\cdots x_m}+x_{m+1}}{m+1}-\sqrt[m+1]{x_1\cdot x_2\cdots x_m\cdot x_{m+1}}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{mp^{m+1}+q^{m+1}}{m+1}-p^mq=\frac{1}{m+1}\left(mp^m(p-q)-q(p^m-q^m)\right)\\ &= \frac{p-q}{m+1}\left(mp^m-qp^{m-1}-q^2p^{m-2}-\cdots-q^m\right)\\ &= \frac{p-q}{m+1}\left((p^m-qp^{m-1})+(p^m-q^2p^{m-2})+\cdots+(p^m-q^m)\right)\\ &= \frac{p-q}{m+1}\left(p^{m-1}(p-q)+p^{m-2}(p^2-q^2)+\cdots+(p^m-q^m)\right)\\ &= \frac{(p-q)^2}{m+1}\left(p^{m-1}+p^{m-2}(p+q)\quad+\cdots+(p^{m-1}+p^{m-2}q+\cdots+q^{m-1})\right)\geq 0.\end{aligned}$$

b) Na osnovu a) za brojeve $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\ldots,\frac{1}{x_n}$, imamo,

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots x_n}}.$$

1.3 Apsolutna vrednost

Definicija 1.2. **Apsolutna vrednost** *realnog broja a se definiše kao*

$$|a| = \begin{cases} a, & ako \quad a > 0; \\ 0, & ako \quad a = 0; \\ -a, & ako \quad a < 0. \end{cases}$$

1.3.1 Zadaci

1.14. *Pokazati da za svako $x \in \mathrm{R}$ važe sledeće osobine apsolutne vrednosti.*

a) $|x| = 0 \iff x = 0$; b) $|-x| = |x|$;
c) $-|x| \leq x \leq |x|$; d) $|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$;
e) $|x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon$.

Rešenja.

a) Sledi iz definicije 1.2.

b) Za $x = 0$ je trivijalno. Za $x < 0$ važi $-x > 0$ pa iz definicije 1.2 sledi $|x| = -x$ i $|-x| = -x$. Tako je $|x| = |-x|$. Za $x > 0$ jednakost je očigledna.

1.15. *Pokazati da za svako $x, y \in \mathrm{R}$ važe sledeće osobine apsolutne vrednosti.*

a) $|x + y| \leq |x| + |y|$; b) $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$;

c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; d) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$.

Rešenja. a) Iz nejednakosti $-|x| \leq x \leq |x|$ i $-|y| \leq y \leq |y|$, sledi
$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|, \quad \text{ili} \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$
b) Iz a), dobijamo sledeće nejednakosti
$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \quad \text{i} \quad |y| = |y - x + x| \leq |-(x - y)| + |x|.$$
Prema tome je
$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y| \Rightarrow \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$
Relacije c) i d) slede iz definicije 1.2.

1.16. *Pokazati da za svako $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{R}$ važi sledeće:*

a) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right| := |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$;

b) $\left|\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right| := |x_1 \cdot x_2 + \cdots x_n| = \prod\limits_{k=1}^{n} |x_k|$.

Rešenje. Koristiti matematičku indukciju.

1.17. *Rešiti sledeće jednačine:*

a) $|5x + 6| = 1$; b) $|3x + 2| - |x - 2| = 10$;

c) $|x| - |x - 1| + 3|x - 2| - 2|x - 3| = x + 1$.

Rešenja.

a) Na osnovu definicije apsolutne vrednosti, za $x \in (-\infty, -6/5)$ $(5x+6 < 0)$ data jednačina se može pisati $-(5x + 6) = 1$, što daje $x = -7/5$. Za $x > -6/5$ data jednačina se može pisati kao $5x + 6 = 1$, čije rešenje je $x = -1$.

b) U ovom slučaju posmatraćemo prvo vrednosti $x \in (-\infty, -2/3)$. Tada je $3x + 2 < 0$ i $x - 2 < 0$, pa se data jednačina može pisati kao
$$-(3x + 2) + (x - 2) = 10, \qquad \text{odakle je} \quad x = -7.$$
Za $x \in (-2/3, 2)$, imamo $3x + 2 + (x - 2) = 10$, odakle je $x = 14/3$, što ne može biti rešenje posmatrane jednačine jer $14/3 \notin (-2/3, 2)$.

Za $x \in (2, \infty)$, imamo $3x + 2 - (x - 2) = 10$, odakle je $x = 3$.

c) $x = -1 \vee x \geq 3$.

1.18. *Rešiti sledeće nejednačine*

a) $|2x + 1| \leq |4x - 7|$; b) $\left|\dfrac{x + 1}{x + 5}\right| < 1$, $x \neq -5$;

c) $\left|\dfrac{5x + 2}{2x - 3}\right| \geq 2$, $x \neq \dfrac{3}{2}$; d) $\left|\dfrac{x}{x + 1}\right| > \dfrac{x}{x + 1}$, $x \neq -1$;

e) $|x^2 - x| - |x| < 1$; f) $|x^3 - x^2| < |x^2 + x|$;

g) $\big|1 - |x - 1|\big| < 1$; h) $\big||x + 1| - |x - 1|\big| < 1$.

Rezultati.

a) $x \in (-\infty, 1] \bigcup [4, +\infty)$.

b) $x \in (-3, +\infty)$.

c) $x \in (-\infty, -8] \bigcup (4/9, 3/2) \bigcup (3/2, +\infty)$.

d) $x \in (-1, 0)$.

e) $x \in (-1, 1 + \sqrt{2})$.

f) $x \in (1 - \sqrt{2}, 0) \bigcup (0, 1 + \sqrt{2})$.

g) $x \in (-1, 1) \bigcup (1, 3)$.

h) $x \in (-1/2, 1/2)$.

1.4 Skup R kao potpuno uredjeno polje

Prikazaćemo sada aksiomatsko zadavanje realnih brojeva.

Neka je skup $\mathbf{R} = \{x, y, z, \ldots\}$ zatvoren u odnosu na operacije *sabiranja* $(+)$ i *množenja* $(\cdot)$ (tj. i zbir i proizvod bilo koja dva elementa iz $\mathbf{R}$ je element skupa $\mathbf{R}$). Na osnovu sledeće tri aksiome:

(R1) $(\forall x, y, z \in \mathbf{R}) \quad (x + y) + z = x + (y + z)$
(asocijativnost sabiranja);

(R2) $(\exists 0 \in \mathbf{R})\, (\forall x \in \mathbf{R}) \quad x + 0 = 0 + x = x$
(postojanje neutralnog elementa za sabiranje);

(R3) $(\forall x \in \mathbf{R})\, (\exists (-x) \in \mathbf{R}) \quad (-x) + x = x + (-x) = 0$
(postojanje inverznog elementa za sabiranje),

skup $\mathbf{R}$ čini **grupu** u odnosu na sabiranje, a ako se doda i aksioma

(R4) $(\forall x, y \in \mathbf{R}) \quad x + y = y + x$
(komutativnost sabiranja),

tada $(\mathbf{R}, +)$ postaje **Abelova ili komutativna grupa.**

Na osnovu sledeće četiri aksiome, $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ postaje **komutativna grupa**:

(R5) $(\forall x, y, z \in \mathbf{R}) \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
(asocijativnost množenja);

(R6) $(\exists 1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\})\, (\forall x \in \mathbf{R}) \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
(postojanje neutralnog elementa za množenje);

(R7) $(\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})\, (\exists x^{-1} \in \mathbf{R} \setminus \{0\}) \quad x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$
(postojanje inverznog elementa za množenje);

(R8) $(\forall x, y \in \mathbf{R}) \quad x \cdot y = y \cdot x$
(komutativnost množenja).

Prethodnih osam aksioma sa aksiomom

(R9) $(\forall x, y, z \in \mathbf{R}) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
(distributivnost množenja u odnosu na sabiranje),

čine da struktura $(\mathbf{R}, +, \cdot)$, tj. skup $\mathbf{R}$ u odnosu na operacije sabiranja i množenja, čini **polje**.

U skupu $\mathbf{R}$ definisana je i binarna relacija *manje ili jednako* $(\leq)$ pomoću sledećih pet aksioma:

(R10) $(\forall x \in \mathbf{R}) \quad x \leq x$ (refleksivnost binarne relacije $\leq$);

(R11) $(\forall x, y, z \in \mathbf{R}) \quad x \leq y \land y \leq z \Rightarrow x \leq z$
(tranzitivnost binarne relacije $\leq$);

(R12) $(\forall x, y \in \mathbf{R}) \quad (x \leq y \land y \leq x) \Rightarrow x = y$
(antisimetrija binarne relacije $\leq$);

(R13) $(\forall x, y \in \mathbf{R}) \quad x \leq y \lor y \leq x$
(uporedivost);

(R14) $(\forall x, y, z \in \mathbf{R}) \quad x \leq y \Rightarrow (x + z \leq y + z)$
(kompatibilnost relacije $\leq$ u odnosu na sabiranje);

(R15) $(\forall x, y \in \mathbf{R}) \quad (0 \leq x \land 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$
(kompatibilnost relacije $\leq$ u odnosu na množenje);

Prethodnih petnaest aksioma definišu skup $\mathbf{R}$ sa operacijama sabiranja i množenja i relacijom $\leq$ kao **uredjeno polje**.

Konačno, imamo aksiomu

(R16) Neka su X i Y dva neprazna podskupa skupa $\mathbf{R}$ sa osobinom

$$(\forall x \in X)\, (\forall y \in Y) \quad x \leq y.$$

Tada postoji $c \in \mathbf{R}$ takav da je

$$(\forall x \in X)\, (\forall y \in Y) \quad x \leq c \leq y.$$

Ovih šesnaest aksioma odredjuju $\mathbf{R}$ kao **kompletno uredjeno polje**. Primetimo da skup racionalnih brojeva, $\mathbf{Q}$, zadovoljava prvih petnaest, ali ne i zadnju šesnaestu, aksiomu.

Uvedimo još neke pojmove vezane za skup realnih brojeva.

- Broj $d \in \mathbf{R}$ je **donje ograničenje** nepraznog skupa $X \subset \mathbf{R}$ ako važi
$$(\forall x \in X) \quad x \geq d.$$
- Skup $X \subset \mathbf{R}$ je **ograničen odozdo** ako ima bar jedno donje ograničenje.
- Najveće donje ograničenje skupa $X \subset \mathbf{R}$ (ili: **infimum** skupa X) je broj $i \in \mathbf{R}$ za koji važe uslovi:
  - $(\forall x \in X) \quad x \geq i$ (tj. i je donje ograničenje skupa X);
  - $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x \in X) \quad x < i + \varepsilon$.
- Infimum skupa $X \subset \mathbf{R}$ koji pripada skupu X se naziva **minimum** skupa X.
- Broj $g \in \mathbf{R}$ je **gornje ograničenje** nepraznog skupa $X \subset \mathbf{R}$ ako važi
$$(\forall x \in X) \quad x \leq g.$$
- Skup $X \subset \mathbf{R}$ je **ograničen odozgo** ako ima bar jedno gornje ograničenje.
- Najmanje gornje ograničenje skupa $X \subset \mathbf{R}$ (ili: **supremum** skupa X) je broj $s \in \mathbf{R}$ za koji važe uslovi:
  - $(\forall x \in X) \quad x \leq s$ (tj. s je gornje ograničenje skupa X);
  - $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x \in X) \quad x > s - \varepsilon$.
- Supremum skupa $X \subset \mathbf{R}$ koji pripada skupu X se naziva **maksimum** skupa X.
- Skup $X \subset \mathbf{R}$ je **ograničen** ako je ograničen i sa donje i sa gornje strane.

Važni podskupovi skupa $\mathbf{R}$ su **intervali** sa krajnjim tačkama a i b, gde je $a < b$.

- **Otvoren interval** je $(a, b) := \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$.
- **Zatvoren interval** je $[a, b] := \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
- Intervali su i skupovi $(a, b] := \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ i $[a, b) := \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$.

Primetimo da su svi ovi intervali ograničeni. **Neograničeni intervali** su sledeći skupovi:

- $(a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}$ i $[a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$;
- $(-\infty, b) := \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}$ i $(-\infty, b] := \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$;
- $(-\infty, +\infty) := \{x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$.

Teorema 1.1 Arhimedova teorema.
Za svako $x > 0$ i $y \in \mathbf{R}$, postoji $n \in \mathbf{N}$ tako da važi $nx > y$.

1.4.1 Zadaci

1.19. *Pomoću aksioma (R1), (R2), (R3) i (R4) pokazati*

a) *u skupu $\mathbf{R}$ postoji jedinstven neutralni element za sabiranje;*

b) *u skupu $\mathbf{R}$ svaki element ima jedinstven inverzni element u odnosu na sabiranje;*

c) *za date realne brojeve a i b jednačina $a + x = b$ ima jedinstveno rešenje u $\mathbf{R}$.*

1.20. *Pomoću aksioma (R5), (R6), (R7), (R8) i (R9) pokazati*

a) *u skupu $\mathbf{R}$ postoji jedinstven neutralni element za množenje;*

b) *u skupu $\mathbf{R}$ svaki element ima jedinstven inverzni element u odnosu na množenje;*

c) *za date realne brojeve a i b jednačina*
$$a \cdot x = b \tag{1.5}$$
ima jedinstveno rešenje u $\mathbf{R}$.

Rešenja.

a) Iz aksiome (R6) sledi ekzistencija neutralnog elementa za množenje. Pretpostavimo da postoje *dva* neutralna elementa za množenje. na primer 1_1 i 1_2. Tada na osnovu (R6) i (R8) sledi
$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2.$$

b) Na osnovu aksiome (R7) za svaki elemenat $x \in \mathbf{R}$ postoji njegov inverzni elemenat u odnosu na množenje. Pretpostavimo da postoje dva takva elementa za elemenat x, recimo x_1 i x_2. Tada iz (R6), (R5) i (R9) sledi
$$x_1 = x_1 \cdot 1 = x_1 \cdot (x \cdot x_2) = (x_1 \cdot x) \cdot x_2 = x_2 \cdot (x_1 \cdot x) = x_2 \cdot 1 = x_2.$$

c) Pomoću aksioma (R8), (R5) , (R7) i (R6), pokazaćemo da broj $x := b \cdot (a^{-1})$ predstavlja rešenje jednačine 1.5

$$a \cdot x = a \cdot (b \cdot (a^{-1})) = a \cdot ((a^{-1}) \cdot b) = (a \cdot (a^{-1})) \cdot b = 1 \cdot b = b \cdot 1 = b.$$

Pod pretpostavkom da postoji elemenat $x_1 \neq x$ koji takodje predstavlja rešenje jednačine 1.5 tj. važi $b = a \cdot x_1$. Tada je

$$(a^{-1}) \cdot b = (a^{-1}) \cdot (a \cdot x_1) = ((a^{-1}) \cdot a) \cdot x_1 = 1 \cdot x_1 = x_1.$$

Znači $x_1 = (a^{-1}) \cdot b = b \cdot (a^{-1}) = x$, što je suprotno pretpostavci.

1.21. *Pomoću (R1), (R2), …, (R15) i zadatka 1.19 i 1.20 pokazati da za sve $x, y, x', y' \in \mathbf{R}$ važi*

a) $x \cdot 0 = 0;$

b) $-x = (-1) \cdot x;$

c) $-(-x) = x;$

d) $x(-y) = -(xy) = -(x)y;$

e) $(-x)(-y) = xy;$

f) $x \leq 0 \iff -x \geq 0;$

g) $x \leq y \iff -x \geq -y;$

h) $(x < 0 \wedge y < 0) \Rightarrow xy > 0;$

i) $(x \leq y \wedge x' \leq y') \Rightarrow x + x' \leq y + y';$

j) $(x < 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy < 0;$

k) $0 < 1;$

l) $x > 0 \iff x^{-1} > 0.$

Rešenja.

a) Na osnovu aksioma (R6), (R8) i (R2) imamo

$$x + x \cdot 0 = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x \cdot (1 + 0) = x \cdot 1 = x,$$

odakle $x + x \cdot 0 = x$. Iz zadatkaa 1.19 c) sledi da je $x \cdot 0$ takodje jedinični elemenat za sabiranje; tako da na osnovu 1.19. a) imamo $x \cdot 0 = 0$.

b) Aksioma (R8) i a) daju

$$x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0.$$

Na osnovu toga je $(-1) \cdot x$ takodje inverzan elemenat elementu x pa prema primeru 1.19.b) imamo $(-1) \cdot x = -x$.

c) Na osnovu definicije elementa $-(-x)$ je $(-x) + (-(-x)) = 0$, dok na osnovu definicije suprotnog elementa u odnosu na sabiranje $-x$ je $(-x) + x = 0$. Na osnovu jedinstvenosti rešenja jednačine $a + x = b$ dobijamo tvrdjenje.

d) Na osnovu jednakosti

$$0 = x \cdot 0 = x(y + (-y)) = xy + x(-y), \quad \text{ili} \quad xy + x(-y) = 0$$

i $xy + (-(xy)) = 0$ sledi $x(-y) = -(xy)$.

e) Sledi iz d) i c).

f) Iz aksiome (R14) sledi $x \leq 0 \Rightarrow (-x) + x \leq (-x) + 0 \Rightarrow 0 \leq -x$.

g) $x \leq y \Rightarrow ((-x) + (-y)) + x \leq ((-x) + (-y)) + y \Rightarrow -y \leq -x.$

h) Pomoću f), (R15) i e) imamo

$$(x < 0 \wedge y < 0) \Rightarrow (-x > 0 \wedge -y > 0) \Rightarrow (-y)(-x) > 0 \iff xy > 0.$$

i) Kako je $x \leq y \Rightarrow x + x' \leq x' + y$ i $x' \leq y' \Rightarrow x' + y \leq y' + y$, iz (R11) i (R4) sledi tvrdjenje.

j) $(x < 0 \wedge 0 < y) \Rightarrow (0 < -x \wedge 0 < y) \Rightarrow (0 < (-x)y) \Rightarrow (0 < ((-1)x)y)$
$\Rightarrow (0 < (-1)(xy)) \Rightarrow (0 < -(xy)) \Rightarrow (xy < 0).$

k) Na osnovu aksiome (R6) je $1 \neq 0$, a na osnovu (R13) je ili $1 > 0$ ili $1 < 0$. Neka je $1 < 0$; tada iz h) i $1 \neq 0$ sledi $(1 < 0 \wedge 1 < 0) \Rightarrow (0 < 1 \cdot 1) \Rightarrow 0 < 1$. To je kontradikcija što znači da je $1 > 0$.

l) Prvo je, $x^{-1} \neq 0$. Neka je $x^{-1} < 0$. Tada iz j) sledi

$$(x^{-1} < 0 \wedge 0 < x) \Rightarrow (x \cdot x^{-1} < 0) \Rightarrow (1 < 0),$$

što je kontradikcija sa k).

1.22. *Pokazati da Arhimedova teorema važi u skupu racionalnih brojeva, tj.*

$$(\forall a \in \mathbf{Q},\ a > 0)\,(\forall b \in \mathbf{Q})\,(\exists n \in \mathbf{N}) \quad na > b.$$

Rešenje. Ako je $a > 0$ i $b \leq 0$, tada možemo uzeti $n = 1$ pa teorema važi. Medjutim ako je $a = \frac{m_1}{m_2}$, $b = \frac{n_1}{n_2}$, za prirodne brojeve m_1, m_2, n_1 i n_2, tada za $n := m_2 n_1 + 1$, imamo

$$na = (m_2 n_1 + 1)\frac{m_1}{m_2} > m_1 n_1 \geq \frac{n_1}{n_2} = b,$$

zato što je $m_1 n_2 \geq 1$.

1.23. *Korišenjem Arhimedove teoreme pokazati sledeće*

a) *za svako $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$, postoji $n \in \mathbf{N}$ takvo da važi* $0 < \frac{1}{n} < |x|$;

b) *ako za nenegativan broj x važi da je za svako $n \in \mathbf{N}$ $x < \frac{1}{n}$, tada je* $x = 0$;

c) *za svako $x \in \mathbf{R}$ postoje brojevi $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ takvi da je $-n_1 < x < n_2$;*

d) *za svako $x \in \mathbf{R}$ postoji $k_0 \in \mathbf{Z}$ takav da je $k_0 \leq x < k_0 + 1$;*

e) *za svako $x, y \in \mathbf{R}$, $x < y$, postoji racionalan broj r, takav da je $x < r < y$.*

Rešenja.

a) Neka je $x \neq 0$ odnosno $|x| > 0$. Tada na osnovu Arhimedove teoreme sledi da za realne brojeve 1 i $|x|$ postoji $n \in \mathrm{N}$ takvo da važi $n|x| > 1$, ili $\frac{1}{n} < |x|$.

b) Ako je $x > 0$, tada iz a) sledi da postoji $n \in \mathrm{N}$ takvo da je $x > \frac{1}{n}$. ($b = 1$ i $a = |x|$ u Arhimedovoj teoremi.)

c) Kako je $1 > 0$, to postoji $n \in \mathrm{N}$ takvo da je $n \cdot 1 > x$. Analogno postoji $n' \in \mathrm{N}$ takvo da je $n' \cdot 1 > -x$ odnosno $-n' < x$. Za $n_1 = n'$ i $n_2 = n$, dobijamo tvrdjenje.

d) Na osnovu Arhimedove teoreme sledi da postoji $k \in \mathrm{N}$ takvo da je $k \cdot 1 > |x| \geq x$, tj. $k > x$. Neka je k_0 najveći medju brojevima $0, \pm 1, \ldots, \pm k$ koji nije veći od x. Tada je $k_0 \leq x < k_0 + 1$. Po konstrukciji, k_0 je jedinstveno odredjen.

Primedba. Najveći ceo realnog broja x jeste najveći ceo broj manji ili jednak sa brojem x i označava se sa $[x]$.

e) Ako je $x < y$, tada je $y - x > 0$, pa prema a) postoji $n \in \mathrm{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < y - x$. Na osnovu d), postoji jedinstveno $p \in \mathrm{Z}$ takvo da je $p = [nx]$, tj. $p \leq nx < p + 1$. Tada je $p + 1 < ny$, jer bi $p + 1 \geq ny$ značilo

$$n(y - x) \leq p + 1 - p \Rightarrow y - x \leq \frac{1}{n},$$

što je kontradikcija. Kako je $\frac{p+1}{n} \in \mathrm{Q}$ i $x < \frac{p+1}{n} < y$, to za racionalan broj r možemo uzeti broj $\frac{p+1}{n}$.

1.24. *Pokazati da jednačina*

$$x^2 = 2 \qquad (1.6)$$

nema *rešenja u skupu racionalnih brojeva* Q.

Rešenje. Pretpostavimo da postoji racionalan broj r koji je rešenje jednačine (1.6); i neka je recimo $r > 0$. Tada se može pisati $r = \frac{p}{q}$, gde su p i q uzajamno prosti prirodni brojevi takvi da važi $r^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$, odnosno $p^2 = 2q^2$.

Odatle sledi da je p^2 paran broj, pa je i p takodje paran broj. Znači možemo pisati $p = 2k$ za neko $k \in \mathrm{N}$, odakle je $q^2 = 2k^2$. Prema tome q^2, a takodje i q su parni brojevi, što je kontradikcija jer brojevi p i q nisu uzajamno prosti.

1.25. *Pokazati da jednačina (1.6)* ima rešenje *u skupu realnih brojeva* R.

Rešenje. Definišimo skuove X i Y kao

$$X := \{x \in \mathrm{R}_+ |\ x^2 < 2\} \quad \text{i} \quad Y := \{y \in \mathrm{R}_+ |\ y^2 > 2\},$$

gde je $\mathrm{R}_+ = \{x \in \mathrm{R} |\ x > 0\}$ skup svih realnih pozitivnih brojeva. Kako je $1^2 = 1 < 2$ i $2^2 = 4 > 2$, sledi da je $1 \in X$ i $2 \in Y$, što znači da skupovi X i Y nisu prazni. Takodje je $X \cap Y = \emptyset$. Ako su x i y pozitivni brojevi, važi

$$x < y \iff x^2 < y^2.$$

To znači da je proizvoljan elemenat iz X manji od bilo kog elementa iz Y. Uslovi aksiome (R16) su zadovoljeni pa prema (R16), postoji *realan broj* r takav da je

$$(\forall x \in X)\,(\forall y \in Y) \quad x \leq r \leq y. \qquad (1.7)$$

Pokažimo da je $r^2 = 2$. Na osnovu (R13) postoje tri mogućnosti: $r^2 < 2$ ili $r^2 > 2$ ili $r^2 = 2$. Pokazaćemo poslednju jednakost.

Pretpostavimo prvo da je $r^2 < 2$. Tada realan broj $r_1 := 2\frac{r+1}{r+2}$ pripada skupu X, jer je

$$r_1^2 - 2 = 4 \cdot \frac{r^2 + 2r + 1}{(r+2)^2} - 2 = 2 \cdot \frac{r^2 - 2}{(r+2)^2} < 0.$$

S druge strane iz

$$r - r_1 = r - 2\frac{r+1}{r+2} = \frac{r^2 - 2}{r+2} < 0,$$

sledi da je $r_1 \in Y$, odnosno $r_1 \in X \cap Y$ što je kontradikcija jer su X i Y birani tako da im presek bude prazan.

Pretpostavka da je $r^2 > 2$ takodje daje kontradictiju. Znači, ostaje samo treća mogućnost, odnosno $r^2 = 2$.

Primedba. Na osnovu primera 1.24, sledi da rešenje x jednačine (1.5) nije racionalan broj. U srvari, postoje dva realna broja koja zadovoljavaju jednačinu $x^2 = 2$, a to su $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$.

1.26. *Pokazati da je*

a) $\sqrt[m]{n}$ *za* $m, n \in \mathrm{N}$ *ili ceo ili iracionalan broj;*

b) $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ *jeste iracionalan broj, za svako* $n \in \mathrm{N}$;

c) $\sqrt{n + \sqrt{n}}$ *je iracionalan broj za svako* $n \in \mathrm{N}$.

Rešenja.

a) Pretpostavimo suprotno, t.j., $\sqrt[m]{n} = \frac{p}{q}$, gde su p i q celi uzajamno prosti brojevi i $|q| \neq 1$. Tada je $n = \frac{p^m}{q^m}$, odakle sledi da p i q imaju zajednički faktor različit od 1, što je kontradikcija.

b) Za svaki prirodan broj n važi $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$, pa $n(n+1)$ nije potpun kvadrat. Zbog a), je koren $\sqrt{n(n+1)}$ iracionalan broj. Iz

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)},$$

sledi da je broj $(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2$ iracionalan, a takodje i $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$.

c) Ako je $n = b^2$ za neko $b \in \mathrm{N}$, tada iz jednakosti

$$\sqrt{n + \sqrt{n}} = \sqrt{b^2 + b} = \sqrt{b(b+1)}$$

sledi da broj $\sqrt{n + \sqrt{n}}$ nije racionalan.

Ako n nije kvadrat nekog celog broja, tada $\sqrt{n}$ nije racionalan broj, pa ni broj $\sqrt{n + \sqrt{n}}$ nije racionalan.

1.27. *Pokazati da*

a) *je broj* $\sqrt{5}$ *iracionalan;*

b) *da su brojevi* $4\sqrt{3}$ *i* $2 + \sqrt{3}$ *iracionalni;*

c) *je broj* $\sqrt{\frac{n+2}{n}}$ *iracionalan za svako* $n \in \mathrm{N}$.

1.28. *Označimo sa (R16') sledeći iskaz:*
(R16)' Svaki sa donje strane ograničen podskup skupa realnih brojeva ima infimum.

a) *Pokazati da svaki sa gornje (respektivno donje) strane ograničen podskup skupa realnih brojeva ima supremum (respektivno infimum).*

b) *Pokazati da se u sistemu aksioma (R1)- (R16) poslednja aksioma tj. (R16) zamenjuje iskazom (R16').*

Rešenje.

a) Pokazaćemo da svaki neprazan sa gornje strane ograničen skup $X \subset R$ ima supremum. Neka je skup Y definisan na sledeći način

$$Y = \{y \mid (y \in \mathrm{R}) \wedge (\forall x \in X) x < y\}.$$

Skup Y je prema pretpostavci neprazan, pa možemo primeniti aksiomu (R16) koja kaže da tada postoji $c \in \mathrm{R}$ tako da je

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y) \quad x < c < y. \tag{1.8}$$

Na osnovu konstrukcije skupa Y je $c = \min Y = \sup X$. Zaista $c \in Y$ jer u suprotnom ako $c \notin Y$ tada postoji $x \in X$ takvo da je $c < x$, što je u suprotnosti sa (1.8).

1.29. *Dokazati* Kantorovu teoremu.

Teorema 1.2 *Neka je za svako* $n \in \mathrm{N}$ *dat zatvoren interval* $[a_n, b_n]$ *i neka* $m \geq n$ *povlači* $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$, *tj.* $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$. *Tada je*

$$\bigcap_{n \in \mathrm{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

1.30. *Pokazati da iz Arhimedove i Kantorove teoreme sledi aksioma (R16') odnosno da svaki neprazan sa donje strane ograničen skup ima infimum.*

Rešenje. Neka je neprazan skup $B \subseteq \mathrm{R}$ ograničen sa donje strane brojem a_1 i neka elemenat $b_1 \in B$. Tada za svako $m \in \mathrm{N}$ postoji najveći broj $n = n_m \in \mathrm{N}_0$, (gde je $\mathrm{N}_0 = \mathrm{N} \cup 0$,) takav da je

$$a_m = a_1 + \frac{n_m}{2^m} \quad \text{donje ograničenje skupa} \quad B.$$

Zaista, ako je $a_1 = \inf B$ tada $n_m = 0$. Ako je $a_1 \neq \inf B$ tada postoji $n_m \in \mathrm{N}$ takvo da važi

$$a_m = a_1 + \frac{n_m}{2^m} < x, \quad \text{za svako} \quad x \in B.$$

Pretpostavimo da ne postoji najveće $n \in \mathrm{N}$ sa navedenom osobinom, nego da za svako $n \in \mathrm{N}$ važi

$$a_1 + \frac{n}{2^m} < x, \quad \text{za svako} \quad x \in B.$$

Tada je $\frac{n}{2^m} < x - a_1$, za svako $n \in \mathrm{N}$, što je u suprotnosti sa Arhimedovom teoremom.

Ako označimo sa $b_m = a_m + \frac{1}{2^m}$, tada (po konstrukciji a_m) je $b_m \in B$ i za svako $m \in \mathrm{N}$ važi $[a_m, b_m] \neq \emptyset$ kao i

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots.$$

Na osnovu Kantorove teoreme postoji b, $b \in \bigcap_{m \in \mathrm{N}} [a_m, b_m]$.

Znači, za svako $m \in \mathrm{N}$ je $a_m \leq b \leq b_m$. Pokažimo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $m \in \mathrm{N}$ takav da je $b - \varepsilon \leq a_m$. Ako pretpostavimo suprotno tj. da postoji $\varepsilon > 0$ takvo da za svako m važi $a_m < b - \varepsilon$, tada je

$$a_1 + \frac{n_m}{2^m} < b - \varepsilon \leq a_1 + \frac{n_m + 1}{2^m} - \varepsilon \quad \text{odnosno} \quad \frac{n_m}{2^m} < \frac{n_m + 1}{2^m} - \varepsilon,$$

što znači da je $\varepsilon < \frac{1}{2^m}$ tj. $2^m < \frac{1}{\varepsilon}$ za svako $m \in \mathbb{N}$. Korišćenjem Bernulijeve nejednakosti imamo

$$(1+1)^m > 1 + m\cdot 1, \quad \text{odnosno} \quad 1+m < \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{za svako} \quad m \in \mathbb{N},$$

što je u suprotnosti sa Arhimedovom teoremom. Prema tome postoji takvo $m \in \mathbb{N}$, da za svako $\varepsilon > 0$ važi $b - \varepsilon \le a_m$.

S druge strane, za dato ε postoji $m \in \mathbb{N}$ sa osobinom da je $b < b_m < b+\varepsilon$. U suprotnom za svako $m \in \mathbb{N}$ je

$$b_m = a_m + \frac{1}{2^m} \ge b + \varepsilon \ge a + \varepsilon, \quad \text{ili je} \quad \frac{1}{2^m} \ge \varepsilon.$$

Na isti način kao u prethodnom slučaju dobijamo kontradikciju. Znači, za dato $\varepsilon > 0$ postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da važi

$$b - \varepsilon \le b \le b_m < b + \varepsilon \tag{1.9}$$

Pokažimo sada da je b infimum skupa B. Pre svega po konstrukciji za proizvoljno $x \in B$ postoji $b_m \le x$, pa je b jedno donje ograničenjeskupa B. Iz (1.9) sledi da je to i naveće donje ograničenje.

1.31. *Neka je* $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ *niz zatvorenih intervala takvih da je*

a) $a_n < b_n$, $n = 1, 2 \ldots;$

b) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $n = 1, 2 \ldots$ *(svaki sledeći interval sadržan je u prethodnom);*

c) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$[1], $n = 1, 2 \ldots$ *(dužine intervala teže nuli)*

Pokazati da tada postoji jedan i samo jedan realan broj α *koji leži u svim intervalima* $[a_n, b_n]$.

Rešenje: Na osnovu Kantorove teoreme sledi da je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n] \ne \emptyset$. Znači postoji realan broj x koji pripada svim intervalima, tj. $a_n < x < b_n$. Pretpostavimo da postoji još jedan broj $y > x$ takav da je $a_n < y < b_n$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Tada iz nejednakosti

$$a_n < x < y < b_n \quad \text{sledi} \quad 0 < y - x < b_n - a_n, \quad \text{za svako} \quad n \in \mathbb{N},$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom da dužine intervala teže nuli kada se n povećava.

1.32. *Neka je skup A dat sa* $A = \left\{\frac{1}{2} \pm \frac{n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ *Pokazati da je* $\inf A = 0$ *i* $\sup A = 1$.

---

[1] Definicija granične vrednosti niza data je u trećoj glavi

Rešenje. Za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\frac{1}{2} \pm \frac{n}{2n+1} \ge \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2(2n+1)} > 0.$$

To znači da je skup A ograničen odozdo sa 0 pa prema primeru 1.28 ima infimum. Pokažimo da je 0 infimum skupa A. Pretpostavimo da je neko $\varepsilon > 0$ infimum skupa A, tada je $\varepsilon \le \frac{1}{6}$ (za $n = 1$). Ako označimo sa $n_0 := \left[\frac{1}{4\varepsilon}(1 - 2\varepsilon)\right] + 1$ tada za $n > n_0$ važi

$$0 < \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} < \varepsilon,$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $\varepsilon > 0$ infimum skupa A.

Pokažimo da je 1 supremum skupa A. Zaista, 1 je gornje ograničenje skupa A, jer za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$1 - \left(\frac{1}{2} \pm \frac{n}{2n+1}\right) \ge \frac{1}{2(2n+1)} > 0.$$

Za svako $\varepsilon > 0$ izaberimo n_0 kao gore; tada za $n > n_0$ važi

$$1 - \varepsilon < \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} \le 1.$$

Poslednja nejednakost pokazuje da je 1 supremum skupa A, što znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji elemenat x iz A koji pripada intervalu $(1 - \varepsilon, 1)$.

1.33. *Za neprazan skup* $X \subset \mathbb{R}$ *definišimo* $-X := \{-x \mid x \in X\}$. *Pokazati*

a) $\inf(-X) = -\sup X$; b) $\sup(-X) = -\inf X$,

pod pretpostavkom da je u a) (resp. u b)) skup X ograničen odozgo (resp. odozdo).

Rešenja.

a) Na osnovu zadatka 1.28 skup X ima supremum; označimo ga sa M. Kako je M gornje ograničenje skupa X, to važi

$$(\forall x \in X) \quad x \le M \iff (\forall x \in X) \quad -x \ge -M.$$

Odatle je

$$(\forall y \in (-X)) \quad y \ge -M. \tag{1.10}$$

Kako je M i najmanje gornje ograničenje za skup X, to je

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x_1 \in X) \quad x_1 > M - \varepsilon \iff (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x_1 \in X) \quad -x_1 < -M + \varepsilon.$$

Prema tome je

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x_2 \in (-X)) \quad x_2 < -M + \varepsilon. \tag{1.11}$$

Relacije (1.10) i (1.11) govore da je $-M$ infimum skupa $-X$.

b) Analogno kao pod a).

1.34. *Neka su X i Y dva neprazna podskupa od $\mathbf{R}$ ograničena odozdo (resp. odozgo). Označimo sa*

$$S := \{s = x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Pokazati da skup S ima infimum (resp. supremum) i da važi

$$\inf S = \inf X + \inf Y \qquad (\textit{resp.}\quad \sup S = \sup X + \sup Y).$$

Rešenje. Iz zadatka 1.28, sledi da ako su skupovi X i Y ograničeni odozdo, tada oni imaju infimum; označimo ga sa $m_1 = \inf X$ i $m_2 = \inf Y$. Tako je

$$(\forall x \in X) \quad x \geq m_1 \quad \text{i} \quad (\forall y \in Y) \quad y \geq m_2.$$

Neka je s proizvoljan elemenat skupa S; tada postoji $x \in X$ i $y \in Y$ takvi da je $s = x + y$. Prema tome je

$$s = x + y \geq m_1 + m_2,$$

pa je skup S ograničen odozdo sa $m_1 + m_2$. Pokažimo da je broj $m = m_1 + m_2$ najveće donje ograničenje za S. Za dato ε, postoji $x_1 \in X$ i $y_1 \in Y$ takvi da je

$$x_1 < m_1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad y_1 < m_2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

To povlači da

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists s_1 := x_1 + y_1 \in S) \quad s_1 = x_1 + y_1 < m_1 + m_2 + \varepsilon,$$

i tako smo dobili da je $m = m_1 + m_2$ infimum skupa S.

1.35. *Odrediti infimume i supremume sledećih skupova (ako oni postoje) i proveriti da li su oni i minimumi ili maksimumi.*

a) $X = \left\{\dfrac{3n-1}{5n+2} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$; b) $X = \left\{\dfrac{3}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$;

c) $X = \left\{1 + \dfrac{3 \cdot (-1)^n}{n} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$; d) $X = \left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \,\middle|\, n \in \mathbf{N}\right\}$;

Rezultati.

a) $\inf X = \min X = \dfrac{2}{7}$, $\sup X = \dfrac{3}{5}$. b) $\inf X = 0$, $\sup X = \max X = 3$.

c) $\inf X = \min X = -2$, $\max X = \dfrac{5}{2}$. d) $\inf X = \min X = \dfrac{1}{3}$, $\sup X = \dfrac{1}{2}$.

1.5 Skup R kao topološki prostor

Definicija 1.3. **Okolina tačke** $x_0 \in \mathbf{R}$ *je svaki skup $U(x_0) \subset \mathbf{R}$ koji za neko $\varepsilon > 0$ sadrži otvoreni interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.*

Jasno, svaka okolina $x_0 \in \mathbf{R}$ sadrži x_0, i svaki interval (a, b) koji sadrži tačku x_0 je takodje i njena okolina.

Definicija 1.4. *Neprazan skup $A \subset \mathbf{R}$ je* **otvoren** *ako je okolina svake svoje tačke.*

Po definiciji, i prazan skup je otvoren.

Definicija 1.5. *Skup $A \subset \mathbf{R}$ je* **zatvoren** *ako je njegov komplement u odnosu na $\mathbf{R}$, tj. skup $\mathbf{R} \setminus A$, otvoren.*

Svaki "otvoreni interval" (a, b) je otvoreni skup, dok je svaki "zatvoreni interval" $[a, b]$ zatvoren skup u smislu zadnje dve definicije (pokažite to!).

Definicija 1.6. *Neka je A podskup skupa realnmih brojeva $\mathbf{R}$.*

a) *Tačka $x_0 \in \mathbf{R}$ je* **unutrašnja tačka** *skupa A ako je A okolina tačke x_0.*

Unutrašnjost *skupa A, u oznaci A°, je skup unutrašnjih tačaka skupa A.*

b) *Tačka $x_0 \in \mathbf{R}$ je* **adherentna tačka** *skupa A ako u svakoj okolini x_0 postoji bar jedna tačka iz A.* **Adherencija** *(ili:* **zatvaranje***) skupa A, u oznaci $\overline{A}$, je skup adherentnih tačaka skupa A.*

c) *Tačka $x_0 \in \mathbf{R}$ je* **tačka nagomilavanja** *skupa A ako za svaku okolina x_0 postoji bar jedna tačka iz A različita od x_0. Skup tačaka nagomilavanja skupa A obeležavaćemo sa A'.*

d) *Tačka $x_0 \in A$ je* **izolovana tačka** *skupa A ako postoji okolina x_0 koja ne sadrži drugih tačaka iz A.*

e) *Tačka $x_0 \in \mathbf{R}$ je* **rubna tačka** *skupa A ako u svakoj okolini x_0 postoji bar jedna tačka iz A i bar jedna tačka iz njegovog komplementa $\mathbf{R} \setminus A$. Skup rubnih tačaka skupa A obeležavaćemo sa ∂A.*

Skup $A \subset \mathbf{R}$ je **ograničen** ako je ograničen i sa donje i sa gornje strane.

Definicija 1.7. *Skup $K \subset \mathbf{R}$ je* **kompaktan** *ako je ograničen i zatvoren.*

Teorema 1.3. Bolcano–Vajerštrasova teorema
Svaki beskonačan i ograničen skup $A \subset \mathbf{R}$ ima bar jednu tačku nagomilavanja u $\mathbf{R}$ (koja ne mora pripadati skupu A).

Definicija 1.8. *Familija skupova* $\{B_i | \, i \in I\}$ *je* **pokrivač** *skupa* $A \subset \mathbb{R}$ *ako za svako* $x \in A$ *postoji indeks* i *iz indeksnog skupa* I *takav da je* $x \in B_i$. *Ako su, dodatno, svi skupovi* B_i *otvoreni, tada se familija* $\{B_i | \, i \in I\}$ *zove* **otvoreni pokrivač** *skupa* A.

Definicija 1.9. *Skup* $A \subset \mathbb{R}$ *ima* **Hajne–Borelovu osobinu** *ako svaki otvoreni pokrivač ima konačni podpokrivač.*

Drugim rečima, ako je $\{O_i | \, i \in I\}$ familija otvorenih skupova čija unija sadrži A, tada iz činjenice da A ima Hajne–Borelovu osobinu sledi da postoji konačan podskup $I_1 \subset I$ takav da važi

$$A \subset \bigcup_{i \in I_1} O_i.$$

Primedba. U Hausdorfovim topološkim prostorima (videti zadatak 1.44) Hajne–Borelova osobina se obično koristi za definiciju kompaktnosti. U zadatku 1.51 ćemo pokazati da je skup $K \subset \mathbb{R}$ kompaktan (= ograničen i zatvoren) ako i samo ako ima Hajne–Borelovu osobinu.[2]

1.5.1 Zadaci

1.36. *Naći unutrašnjost, zatvaranje, tačke nagomilavanja, izolovane i rubne tačke za sledeće skupove:*

a) $A = [0,1]$; b) $B = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$;

c) $C = \left\{\frac{1}{2^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$; d) $D = \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Rezultati.

a) $A^\circ = (0,1)$, $\overline{A} = [0,1]$, $A' = [0,1]$, A nema izolovanih tačaka, $\partial A = \{0,1\}$.

b) $B^\circ = \emptyset$, $\overline{B} = B$, $B' = \{0\}$, sve tačke skupa $B \setminus \{0\}$ su izolovane, $\partial B = B$.

c) $C^\circ = \emptyset$, $\overline{C} = C \bigcup \{0\}$, $C' = \{0\}$, sve tačke iz C su izolovane, $\partial C = C$.

d) $D^\circ = \emptyset$, $\overline{D} = D$, $D' = \emptyset$, sve tačke iz D su izolovane, $\partial D = D$.

---

[2] Medjutim, postoje topološki prostori u kojima postoje skupovi koji su ograničeni i zatvoreni, ali nemaju Hajne–Borelovu osobinu!

1.37. *Pokazati da ako je* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tačka nagomilavanja skupa* $A \subset \mathbb{R}$, *tada u svakoj okolini tačke* α *ima beskonačno mnogo tačaka iz* A.

Rešenje. Ako je $U(\alpha)$ proizvoljna okolina α, tada prema definiciji 1.3 postoji interval $(\alpha - \varepsilon_1, \alpha + \varepsilon_1) \subset U(\alpha)$. (Ovaj interval je takodje okolina tačke α.) Pošto je α tačka nagomilavanja skupa A, prema definiciji 1.6 c) postoji element $\alpha_1 \neq \alpha$ sa osobinom

$$\alpha_1 \in (\alpha - \varepsilon_1, \alpha + \varepsilon_1) \bigcap A.$$

Stavimo $\varepsilon_2 := (|\alpha - \alpha_1|)/2$. Tada u intervalu $(\alpha - \varepsilon_2, \alpha + \varepsilon_2)$ postoji element $\alpha_2 \in A$ koji je različiti i od α i od α_1. Nastavljajući ovaj postupak, dobijamo beskonačno mnogo tačaka iz A koje leže u intervalu $(\alpha - \varepsilon_1, \alpha + \varepsilon_1)$, dakle i u datoj okolini $U(\alpha)$ tačke α.

1.38. *Pokazati da je svaka tačka nagomilavanja skupa* $A \subset \mathbb{R}$ *takodje i u zatvaranju tog skupa. Da li je obrnuto tvrdjenje tačno?*

Rešenje. Neka je α tačka nagomilavanja skupa A. Tada u svakoj okolini $U(\alpha)$ od α postoji tačka $\beta \in A$, $\beta \neq \alpha$. Prema definiciji 1.6 b), α je tada i u skupu $\overline{A}$, tj. u zatvaranju skupa A.

Obrnuto tvrdjenje nije tačno, kako ćemo videti iz sledećeg primera.

Neka je $A := (0,1) \bigcup \{2\}$. Tada je $\overline{A} = [0,1] \bigcup \{2\}$, dok je skup tačaka nagomilavanja $A' = [0,1]$. Naime, tačka 2 nije tačka nagomilavanja skupa A, nego je njegova izolovana tačka jer interval $(2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2})$ nema drugih tačaka iz A različitih od samog broja 2.

1.39. *Pokazati da za svaki skup* $A \subset \mathbb{R}$ *važi jednakost* $\overline{A} = A \bigcup A'$, *tj. zatvaranje skupa je jednako uniji tog skupa i njegovih tačaka nagomilavanja.*

Rešenje. Iz definicije 1.6 b) sledi $A \subset \overline{A}$, dok iz zadatka 1.38 sledi $A' \subset \overline{A}$, pa je $A \bigcup A' \subset \overline{A}$. Da bi dokazali obrnutu inkluziju, neka je $x \in \overline{A}$. Tada je ili $x \in A$ (u kom slučaju nema više šta da se pokazuje), ili je $x \notin A$. U zadnjem slučaju, treba da pokažemo da je x tačka nagomilavanja skupa A. U suprotnom, postojala bi okolina tačke x koja je disjunktna sa skupom A; medjutim, tada x ne može pripadati zatvaranju skupa A.

1.40. *Pokazati da je zatvaranje skupa zatvoren skup.*

Rešenje. Neka je $\overline{A}$ zatvaranje skupa $A \subset \mathbb{R}$. Pokazaćemo da je skup $B := \mathbb{R} \setminus \overline{A}$ otvoren. Neka je $\beta \in B$. Prema zadatku 1.39 je

$$\beta \notin \overline{A} \iff (\beta \notin A \wedge \beta \notin A').$$

Iz definicije 1.6 c) sledi da postoji okolina $U(\beta)$ tačke β koja je disjunktna sa A. Prema definiciji 1.3, $U(\beta)$ sadrži otvoreni interval $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon)$; on ne sadrži ni jednu tačku nagomilavanja skupa A. Dakle, taj interval je sadržan u B, što znači da je B okolina svake svoje tačke. Prema definiciji 1.4, skup B je otvoren, pa je skup $\overline{A} = \mathbf{R} \setminus B$ zatvoren.

1.41. *Skup je zatvoren ako i samo ako sadrži sve svoje tačke nagomilavanja.*

1.42. *Zatvaranje $\overline{A}$ skupa $A \subset \mathbf{R}$ je najmanji zatvoreni skup koji sadrži skup A.*

Rešenje. U zadatku 1.40 pokazali smo da je skup $\overline{A}$ zatvoren. Neka je $B \subset \mathbf{R}$ zatvoren skup koji sadrži A. Treba da pokažemo da je $\overline{A} \subset B$. U suprotnom, postojala bi tačka $\alpha \in \overline{A} \setminus B$. Pošto B sadži A, to je $\alpha \in \overline{A} \setminus A$, pa je prema zadatku 1.39 α tačka nagomilavanja skupa A. Medjutim, to je u kontradikciji sa zadatkom 1.41.

Primedba. Ovaj zadatak opravdava termin "zatvaranje skupa".

1.43. *Otvoreni skupovi u $\mathbf{R}$ zadovoljavaju sledeće tri osobine.*

(ts1) *Skupovi $\mathbf{R}$ i $\emptyset$ su otvoreni.*

(ts2) *Proizvoljna unija otvorenih skupova je otvoren skup.*

(ts3) *Konačan presek otvorenih skupova je otvoren skup.*

Primedba. Familija τ skupova koji su sadržani u nekom skupu X, gde je $\tau := \{O_i | \, i \in I\}$, a I skup indeksa, se naziva **topologija** na X ako zadovoljava osobine (ts1) – (ts3), a skup X se naziva **topološki prostor**. (Naravno, u (ts1) se "$\mathbf{R}$" mora zameniti sa "X".) Elementi familije τ se tada nazivaju *otvoreni skupovi*.

Iz zadatka 1.43 sledi da ako se otvoreni skupovi u $\mathbf{R}$ uvedu kao u definiciji 1.4, tada skup $\mathbf{R}$ postaje topološki prostor.

1.44. *Pokazati da za svaka dve tačke x i y, $x \neq y$, postoje dve disjunktne okoline tih tačaka.*

Rešenje. Neka je $r := |x - y| > 0$. Tada su intervali $(x - \frac{r}{3}, x + \frac{r}{3})$ i $(y - \frac{r}{3}, y + \frac{r}{3})$ disjuntne okoline tačaka x i y, respektivno.

Primedba. Topološki prostor sa ovom osobinom se naziva **Hausdorfov prostor**. U prethodnom zadatku smo pokazali da je skup $\mathbf{R}$. sa topologijom uvedenom pomoću otvorenih skupova definisanom u definiciji 1.4, Hausdorfov prostor.

1.45. *Proveriti da li su skupovi dati u zadatku 1.36 kompaktni.*

Rezultati.

a) Skup A is kompaktan, jer je ograničen i zatvoren.

b) Skup B je sadržan u $[0, 1]$, pa je ograničen. Jedina tačka nagomilavanja skupa B je 0, koja pripada B, pa je taj skup i zatvoren. Prema tome, B je kompaktan.

c) Skup C je ograničen, ali ne sadrži svoju tačku nagomilavanja 0, pa nije zatvoren. Dakle, C nije kompaktan.

d) Skup prirodnih brojeva $\mathbf{N}$ nema tačaka nagomilavanja, pa je $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N}$. Medjutim, $\mathbf{N}$ nije ograničen, pa nije kompaktan.

1.46. *Pokazati da svaki neprazan podskup S kompaktnog skup $K \subset \mathbf{R}$ ima infimum i supremum, i da oba pripadaju skupu K.*

Rešenje. Na osnovu definicje 1.7 skup K is ograničen, pa to važi i za njegov podskup S. Prema zadatku 1.28, postoje realni brojevi α i β takvi da je $\inf S = \alpha$ i $\sup S = \beta$. Ostaje da se pokaže da važi $\alpha, \beta \in K$.

Pokazaćemo samo da je $\alpha \in K$; pretpostavimo suprotno, tj. $\alpha \notin K$. Pošto je K zatvoren, to je skup $\mathbf{R} \setminus K$ otvoren. Dakle, postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je interval $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ disjunktan sa K. Pošto je prema pretpostavci zadatka $S \subset K$, to je $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \bigcap S = \emptyset$. Ali tada ne postoji elemenat s_1 iz S sa osobinom $s_1 < \alpha + \varepsilon$, što je u suprotnosti sa jednakosti $\alpha = \inf S$.

1.47. *Pokazati da*

a) *konačan skup ne može imati tačku nagimalavanja;*

b) *je svaki konačan skup je kompaktan.*

1.48. *Pokazati da je zatvoreni podskup kompaktnog skupa takodje kompaktan.*

1.49. *Skup $K \subset \mathbf{R}$ je kompaktan ako i samo ako svaki njegov beskonačan podskup ima bar jednu tačku nagomilavanja koja pripada skupu K.*

Rešenje. Zadatak 1.47 pokazuje da je dovoljno posmatrati slučaj kada je skup K beskonačan.

- **Uslov je potreban.** Neka je K kompaktan, tj. ograničen i zatvoren (videti definiciju 1.7). Neka je S beskonačan podskup od K. Tada je i S ograničen skup. Prema Bolcano–Vajerštrasovoj teoremi 1.3, skup S ima bar jednu tačku nagomilavanja $\alpha \in \mathbf{R}$. Pošto je $S \subset K$, to je α takodje tačka nagomilavanja za K. Pošto je K zatvoren, prema zadatku 1.41 on sadrži sve svoje tačke nagomilavanja. Dakle $\alpha \in K$.

- **Uslov je dovoljan.** Neka svaki beskonačan podskup S skupa K ima tačku nagomilavanja koja pripada K. Treba pokazati da je K zatvoren i ograničen skup.

  Pokažimo prvo da K sadrži sve svoje tačke nagomilavanja, što je prema zadatku 1.41 ekvivalentno sa iskazom da je K zatvoren skup. Neka je β tačka nagomilavanja skupa K. Treba da pokažemo da je β u K. Na osnovu definicje 1.6 c), za svako $\varepsilon > 0$ u intervalu $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) \bigcap K$ postoji bar jedna tačka $a_1 \neq \beta$. Stavimo $d_1 := |\beta - a_1|$. Dalje, u intervalu $(\beta - \frac{d_1}{2}, \beta + \frac{d_1}{2}) \bigcap K$ postoji tačka $a_2 \neq \beta$. Ako ovaj postupak ponovimo beskonačno mnogo puta, dobijamo beskonačan skup $S = \{a_1, a_2, \dots\}$ koji je sadržan u K. Prema konstrukciji, β je tačka nagomilavanja skupa S, pa je $\beta \in K$.

  Ostaje da se dokaze da je K ograničen skup. Prepostavimo da je K neograničen. Konstruisaćemo beskonačan podskup S skupa K koji nema tačaka nagomilavanja. Neka je a_1 proizvoljan elemenat iz K. Prema Arhimedovoj teoremi, 1.1 postoji prirodan broj n_1 takav da je $|a_1| < n_1$. Pošto je K neograničen, postoji elemenat $a_2 \in K$ takav da je $n_1 < |a_2|$. Izaberimo $n_2 \in \mathbf{N}$ tako da važi $n_2 > |a_2|$; posle toga, uzmimo $a_3 > n_2$, itd. Skup $S = \{a_1, a_2, \dots\}$, koga smo na ovaj način konstruisali, je beskonačan, sadržan je u K, i nema tačaka nagomilavanja u K. To je u suprotnosti sa prepostavkom da K sadrži sve tačke nagomilavanja svojih beskonačnih podskupova.

1.50. *Pokazati da svaki beskonačan niz elemenata kompaktnog skupa ima konvergentan podniz (videti definiciju 3.44).*

1.51. *Pokazati da je Hajne–Borelova osobina potreban i dovoljan uslov da skup $K \subset \mathbf{R}$ bude kompaktan.*

Rešenje.

- **Uslov je potreban.** Neka je K kompaktan skup u $\mathbf{R}$, tj. neka je K ograničen i zatvoren, ali neka ne zadovoljava Hajne–Borelovu osobinu. To znači da postoji otvoreni pokrivač

$$\mathcal{P} = \{O_i | \, i \in I\}$$

skupa K koji nema konačan podpokrivač. Pošto je skup K ograničen, to postoji zatvoreni interval $[a_1, b_1]$ koji sadrži K. Podelimo ovaj interval na dva jednaka dela i obeležimo sa $[a_2, b_2]$ onu polovinu intervala $[a_1, b_1]$ sa osobinom da familija $\mathcal{P}$ nema konačan podpokrivač skupa $[a_2, b_2] \bigcap K$. Nastavljajući ovaj postupak, dolazimo do niza zatvorenih intervala $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbf{N}$, sa osobinom da je svaki sadržan u prethodnom; očevidno njihove dužine teže nuli kada $n \to \infty$. Iz zadatka 1.29 sledi da postoji jedinstven realan broj α sadržan u svakom od intervala $[a_n, b_n]$.

Pokazaćemo sada da je α tačkla nagomilavanja skupa K, tj. da u svakoj okolini tačke α postoji beskonačno mnogo elemenata iz K. Ako je $U(\alpha)$ okolina tačke α, tada prema definiciji 1.3 postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset U(\alpha)$. Pošto dužine intervala $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbf{N}$, teže nuli, to postoji prirodan broj n_0 takav da za $n > n_0$ važi

$$[a_n, b_n] \subset (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset U(\alpha).$$

Po konstrukciji, za $n > n_0$ svaki interval $[a_n, b_n]$ ima beskonačno mnogo elemenata iz K, pa je α tačka nagomilavanja skupa K. K. Pošto zatvoreni skup sadrži svoje tačke nagomilavanja, a K je zatvoren, to $\alpha \in K$.

Pošto je familija skupova $\{O_i | \, i \in I\}$ otvoreni podpokrivač skupa K, to postoji indeks $i_1 \in I$ sa osobinom $\alpha \in O_{i_1}$. Osim toga, postoji prirodan broj n_1 sa osobinom da za svako $n > n_1$ važi $[a_n, b_n] \subset O_{i_1}$. Tako smo pokrili *sve* intervale $[a_n, b_n]$, $n > n_1$, sa samo jednim otvorenim skupom O_{i_1}, iako smo pretposatvili da ne postoji konačan pokrivač bilo kojeg ot tih intervala.

- **Uslov je dovoljan.** Neka skup K ima Hajne–Borelovu osobinu; treba da pokažemo da je K kompaktan. Pretpostavimo da K *nije* kompaktan. Tada prema zadatku 1.49, postoji beskonačan skup $S \subset K$ koji nema tačaka nagomilavanja u K. To znači da za svaku tačku $x \in (K \backslash S)$ postoji otvoren skup O_x takav da je $S \bigcap O_x = \emptyset$. Za svako $y \in S$ postoji otvoren skup O_y iz otvorenog pokrivača sa osobinom $O_y \bigcap S = \{y\}$; u suprotnom, y bi bila tačka nagomilavanja skupa S koja pripada K.

  Očevidno je da važi

$$K \subset \Big(\bigcup_{x \in K \backslash S} O_x\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{y \in S} O_y\Big),$$

  ali pošto je skup S beskonačan, ne može se naći konačan podpokrivač skupa K. To je u kontradkciji sa pretpostavljenom Hajne–Borelovom osobinom skupa K.

1.52. *Da li skup* $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathrm{N} \right\}$ *ima Hajne-Borelovu osobinu?*

Rešenje. Pokazaćemo na dva načina da skup A nema Hajne-Borelovu osobinu.

- I Broj 0 je jedina tačka nagomilavanja skupa A. Pošto $0 \notin A$, to skup A nije zatvoren, pa time ne može biti ni kompaktan. Prema zadatku 1.51 to je ekvivalentno sa iskazom da A nema Hajne-Borelovu osobinu.
- II Posmatrajmo otvorene intervale
$$O_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}\right), \quad n \in \mathrm{N}.$$
Očevidno je $A \subset \bigcup\limits_{n \in \mathrm{N}} O_n$, ali familija skupova $\{O_n \mid n \in \mathrm{N}\}$, nema konačan podpokrivač skupa A. To sledi iz sledećih relacija:
$$\frac{1}{n+1} = \frac{n^2-1}{(n+1)(n^2-1)} = \frac{n^2-1}{n^3+n^2-n-1} < \frac{n^2-1}{n^3} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3},$$
za $n = 2, 3, \ldots$.

1.53. **Rastojanje** *(ili: metrika) je funkcija* $d : \mathrm{R} \times \mathrm{R} \to [0, +\infty)$ *definisana sa*
$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathrm{R}.$$
Pokazati sledeće osobine rastojanja d :

(M1) $(\forall x, y \in \mathrm{R})\ \ d(x, y) > 0$ *ako* $x \neq y$ *i* $d(x, y) = 0$ *ako* $x = y$;

(M2) $(\forall x, y \in \mathrm{R})\ \ d(x, y) = d(y, x)$;

(M3) $(\forall x, y, z \in \mathrm{R})\ \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Primedba. Skup X sa funkcijom $d : X \times X \to [0, +\infty)$ koja zadovoljava gornje uslove (M1) – (M3) (gde je R zamenjeno sa X) se naziva **metrički prostor**.

Glava 2

Funkcije

2.1 Osnovni pojmovi

Definicija 2.1. *Neka su* A *i* B *dva neprazna skupa. Pridruživanje (korespondencija, pravilo)* f *koje svakom elementu skupa* A *dodeljuje tačno jedan element skupa* B *naziva se* **funkcija**.

Ekvivalentna prethodnoj je

Definicija 2.2. *Neka su* A *i* B *dva neprazna skupa. Relacija* $f \subset A \times B$ *je* **funkcija** *ako važe sledeća dva uslova*

(i) $(\forall x \in A)\,(\exists y \in B)\ \ (x, y) \in f$;

(ii) $((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f) \Rightarrow y_1 = y_2$.

U oba slučaja pišemo $f : A \to B$. Skup A se naziva **domen** (ili: **definicioni skup**) **funkcije** f, a skup B se naziva **kodomen funkcije** f.

Ako $(x, y) \in f$, pisaćemo $y = f(x)$. Za veličinu $x \in A$ kažemo da je **nezavisno promenljiva** (ili: original), a za veličinu $y = f(x) \in B$ da je **zavisno promenljiva** (ili: slika).

Skup vrednosti funkcije f je skup
$$f(A) = \{y \in B \mid \exists x \in A,\ y = f(x)\}.$$
Dakle, $f(A) \subset B$.

Mi ćemo posmatrati samo one funkcije čiji su i domen i kodomen neki podskupovi skupa realnih brojeva R. Takve funkcije se nazivaju *realne funkcije jedne realne promenljive*, a u ovoj knjizi ćemo ih zvati *funkcijama*.

Posledica definicije 2.2 jeste da su dve **funkcije** $f_1 : A_1 \to B_1$ i $f_2 : A_2 \to B_2$ **jednake** ako i samo ako imaju jednake domene, tj. $A_1 = A_2$, jednake kodomene, tj. $B_1 = B_2$, i, naravno, ako važi $f_1(x) = f_2(x)$ za sve $x \in A_1 = A_2$.

Definicija 2.3. *Funkcija* $f : A \to B$ *je* **injekcija** *(ili: funkcija* $1 - 1$*) ako za svaki par* x_1 *i* x_2 *iz skupa* A *važi* $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Definicija 2.4. *Funkcija* $f : A \to B$ *je* **surjekcija** *(ili: funkcija* **na***) ako važi za svako* $y \in B$ *postoji* $x \in A$ *takvo da je* $f(x) = y$.

Drugim rečima, funkcija f je surjekcija ako i samo ako je $f(A) = B$, tj. ako se njen skup vrednosti poklapa sa njenim kodomenom.

Definicija 2.5. *Funkcija* $f : A \to B$ *je* **bijekcija** *ako je i injekcija i surjekcija.*

Definicija 2.6. *Za dve funkcije* $f : A \to B$ *i* $g : B \to C$, *funkcija* $g \circ f : A \to C$, *data sa*
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in A,$$
zove se **kompozicija** *funkcija* f *i* g *(ili:* **složena funkcija***) od* f *i* g.

Definicija 2.7 *Funkcija* f *je* **ograničena** *na skupu* $X \subset A$ *ako postoji konstanta* $C > 0$ *sa osobinom* $|f(x)| \leq C$ *za sve* $x \in X$.

Skup $A \subset \mathbf{R}$ je **simetričan** (prema koordinatnom početku) ako za svako $x \in A$ važi da i $-x \in A$.

- Funkcija $f : A \to B$, gde je skup A simetričan, je **parna**, ako važi
$$(\forall x \in A) \quad f(-x) = f(x).$$
(Geometrijski, to znači da je grafik parne funkcije osno simetričan u odnosu na y-osu.)

- Funkcija $f : A \to B$, gde je skup A simetričan, je **neparna**, ako važi
$$(\forall x \in A) \quad f(-x) = -f(x).$$
(Geometrijski, to znači da je grafik neparne funkcije centralno simetričan u odnosu na koordinatni početak.)

Funkcija može biti ili parna, ili neparna ili *ni parna ni neparna*.

Definicija 2.8 *Funkcija* $f : A \to B$ *je* **periodična** *na* A *ako postoji realan broj* $\tau \neq 0$ *sa osobinom*
$$(\forall x \in A) \quad x + \tau \in A, \;\; f(x + \tau = f(x).$$

Broj τ se tada naziva **period** funkcije $f : A \to B$. **Osnovni period** funkcije f je najmanji pozitivni period te funkcije (ako postoji).

Definicija 2.9. *Neka je funkcija* $f : A \to B$ *bijekcija. Tada za svako* $y \in B$ *postoji tačno jedan element* $x \in A$, *takav da je* $y = f(x)$, *pa je relacija*
$$f^{-1} := \{(y, x) \in B \times A |\; y = f(x)\}$$
funkcija sa domenom B *i kodomenom* A *koja se naziva* **inverzna funkcija** *za* f.

Inverzna funkcija je takodje bijekcija i za nju važe sledeće jednakosti:
$$(\forall y \in B) \quad f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y,$$
$$(\forall x \in A) \;\; f^{-1} \circ f(x) = x, \qquad (\forall y \in B) \;\; f \circ f^{-1}(y) = y.$$

Definicija 2.10. **Grafik funkcije** $f : A \to B$ *je podskup* G_f *skupa* $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ *dat sa*
$$G_f = \Big\{ \big(x, f(x)\big) \Big| \; x \in A \Big\}.$$

Definicija 2.11. *Funkcija* $f : A \to B$

- **monotono raste** *(respektivno* **ne opada***) na* A *ako za svaki par* x_1, x_2 *tačaka iz skupa* A *važi*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \Big(\textit{respektivno} \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\Big);$$
- **monotono opada** *(respektivno* **ne raste***) na* A *ako za svaki par* x_1, x_2 *tačaka iz skupa* A *važi*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \Big(\textit{respektivno} \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)\Big).$$

Definicija 2.12. *Funkcija* $f : A \to B$ *ima*

- **lokalni maksimum** *(respektivno* **strogi lokalni maksimum***) u tački* $x_0 \in A$ *ako postoji broj* $\epsilon > 0$ *sa osobinom da važi*
$$x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap A \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$
$$\Big(\textit{respektivno} \;\; x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap A) \wedge (x \neq x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0)\Big);$$
- **lokalni minimum** *(respektivno* **strogi lokalni minimum***) u tački* $x_0 \in A$ *ako postoji broj* $\epsilon > 0$ *sa osobinom da važi*
$$x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap A \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$$
$$\Big(\textit{respektivno} \;\; (x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap A) \wedge (x \neq x_0) \Rightarrow f(x) > f(x_0)\Big).$$

Za izraze "maksimum" i "minimum" koristi se i zajednički termin "ekstremna vrednost", ili, kraće, "ekstrem".

2.1.1 Zadaci

2.1. *Neka je* $f : A \to B$ *funkcija. Pokazati da za proizvoljne skupove* $X, Y \subset A$ *važe sledeće relacije:*

a) $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$; b) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;

c) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$; d) $f(X \setminus Y) \subset f(X) \setminus f(Y)$; $Y \subset X$.

Da li je u a) suprotna implikacija, a u c) suprotna inkluzija tačna?

Rešenja.

a) Ako je $y \in f(X)$, tada postoji element $x \in X$ takav da je $f(x) = y$. Pošto $X \subset Y$, to je $x \in Y$, pa je $f(x) \in f(Y)$, tj. $y \in f(Y)$.

Suprotna implikacija ne mora da važi. Na primer, ako je funkcija $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ data sa $f(x) = x^2$, i neka je $X = \{1, -1\}$ i $Y = \{1, 2\}$. Tada je $f(X) = \{1\} \subset \{1, 4\} = f(Y)$, ali nije $X \subset Y$.

c) Ako je $y \in f(X \bigcap Y)$, tada postoji element $x \in X \bigcap Y$ takav da je $f(x) = y$. Iz $x \in X \cap Y$ sledi $x \in X$ i $x \in Y$, pa je $y \in f(X)$ i $y \in f(Y)$. To znači da je $y \in f(X) \cap f(Y)$.

Sledeći kontraprimer pokazuje da u c) ne važi uvek jednakost.

Neka je $A = B = \mathbf{R}$, i neka je funkcija data sa $f(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$. Za $X = \{-1, 2\}$ i $Y = \{1, 2\}$ je $f(X) = f(Y) = \{1, 4\}$. Medjutim, $f(X \cap Y) = f(\{2\}) = \{4\}$, dok je $f(X) \cap f(Y) = \{1, 4\}$, što pokazuje da su skupovi $f(X \cap Y)$ i $f(X) \cap f(Y)$ različiti.

2.2. *Ispitati da li su funkcije* $f : A \to \mathbf{R}$ *i* $g : B \to \mathbf{R}$ *jednake, ako je:*

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $A = \mathbf{R}$, $g(x) = x$, $B = \mathbf{R}$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $A = [0, +\infty)$, $g(x) = x$, $B = [0, +\infty)$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2}$, $A = \mathbf{R}$, $g(x) = |x|$, $B = \mathbf{R}$;

d) $f(x) = \dfrac{x}{3x}$, $A = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $g(x) = \dfrac{1}{3}$, $B = \mathbf{R}$;

e) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, $A = \mathbf{R}$, $g(x) = 1$, $B = \mathbf{R}$;

f) $f(x) = \log_{10} x^4$, $A = (0, +\infty)$, $g(x) = 2\log_{10}(x^2)$, $B = (0, +\infty)$;

g) $f(x) = \log_{10} x^4$, $A = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $g(x) = 2\log_{10}(x^2)$, $B = (0, +\infty)$.

Rešenja. U zadacima b), c), e) i f), funkcije f i g su jednake.

a) Funkcije f i g nisu jednake, jer je $f(-1) = 1$, dok je $g(-1) = -1$.

d) i g) Funkcije f i g nisu jednake, jer su im domeni različiti.

2.3. *Odrediti najveći skup* $A \subset \mathbf{R}$ *takav da sledeći analitički izrazi (formule) imaju smisla (skup A je tada* **prirodni domen** *funkcije date tom formulom):*

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$; b) $f(x) = x \cdot \sqrt[4]{\sin\sqrt{x}}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\cos x^2}} + \sqrt[5]{2\sin x}$; d) $f(x) = \sqrt{\ln \sin x}$;

e) $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x} + \arccos\sqrt{x}$; f) $f(x) = \ln\left(\arccos\left(\dfrac{x+2}{5-x}\right)\right)$;

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}} + \ln(x+4)$; h) $f(x) = \sin\left(\ln\sqrt{-x^2}\right)$.

Rešenja.

a) U datoj formuli imenilac je jednak nuli za $x = 1$ i $x = 2$, a funkcija $g(x) = x^2 - 3x + 2$ je nenegativna za $x \in (-\infty, 1] \bigcup [2, +\infty)$. Prema tome, domen date funkcije je $A = (-\infty, 1) \bigcup (2, +\infty)$.

b) Prirodni domen funkcije $g(t) = \sqrt{t}$ je skup $\{t \in \mathbf{R} \mid t \geq 0\}$, što znači da je $A \subset [0, +\infty)$. Dalje je $\sin s \geq 0 \iff s \in \bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$. Iz toga sledi da je $A = \bigcup\limits_{k \in \mathbf{Z}} [4k^2\pi^2, (2k+1)^2\pi^2]$.

c) Pre svega, formula $\sqrt[5]{2\sin x}$ je definisana za svako $x \in \mathbf{R}$. Funkcija $g(x) = \cos x^2$, $x \in \mathbf{R}$, je nenegativna ako i samo ako je $0 \leq x^2 \leq \pi/2$ i

$(4k-1)\pi/2 \le x^2 \le (4k+1)\pi/2$, $k \in \mathbf{N}$. Kako za svako $x \in \mathbf{R}$ važi $\sqrt{x^2} = |x|$, i kako se funkcija $\sqrt{\cos x^2}$ nalazi u imeniocu, to je

$$A = \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, |x| < \sqrt{\pi/2}\right\} \cup \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, \sqrt{(4k-1)\pi/2} < |x| < \sqrt{(4k+1)\pi/2}\right\}.$$

d) Kako je $\ln \sin x \ge 0$ samo za one vrednosti x–a za koje je $\sin x = 1$, to je traženi definicioni skup $A = \left\{(4k+1)\pi/2 \,\middle|\, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

e) Formula $\sqrt{1-x}$ je definisana za $x \le 1$, dok je formula $\sqrt{x}$ definisana za $x \ge 0$. Dalje, formula $g(t) = \arcsin t$ definisana je za $-1 \le t \le 1$, tako da za $x \in [0,1]$ važi da je $0 \le \sqrt{1-x} \le 1$ i $0 \le \sqrt{x} \le 1$. Prema tome, domen date funkcije je $A = [0,1]$.

f) Formula $\arccos \dfrac{x+2}{5-x}$ definisana je za $-1 \le \dfrac{x+2}{5-x} \le 1$, odnosno za $x \in (-\infty, 3/2)$. (Za $0 \le \arccos t \le \pi$ je $-1 \le t \le 1$, slika ??.)

g) Funkcija $\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ je definisana za $x < 0$, (jer za $x \ge 0$ važi $|x| - x = 0$), dok je funkcija $\ln(x+4)$ definisana za $x > -4$. Prema tome, data funkcija je definisana za $-4 < x < 0$.

h) Funkcija nije definisana ni za jednu vredost $x \in \mathbf{R}$.

2.4. *Da li se mogu odrediti konstante a i b za funkciju*

$$f(x) = 2x^m + ax^n + bx^{-m} + x^{-n}, \quad x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}, \qquad m, n \in \mathbf{N},$$

tako da za svako $x \ne 0$ *važi* $f(x) = f(1/x)$?

Rešenje. Jednakost $f(x) = f(1/x)$ povlači

$$2x^m + ax^n + bx^{-m} + x^{-n} = 2x^{-m} + ax^{-n} + bx^m + x^n,$$

odakle se dobija $a = 1$, $b = 2$.

2.5. *Za funkciju f datu sa*

a) $f(x) = x^5 + 4x^3 - 6x + 2$, *odrediti* $f(a) + f(-a)$, $a \in \mathbf{R}$;

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, *odrediti* $f(1+a) + f(1-a)$, $a \in \mathbf{R}$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, *odrediti* $f(a + 1/a)$, *za* (i) $a > 1$; (ii) $0 < a < 1$; (iii) $-1 < a < 0$; (iv) $a < -1$.

Rezultati. a) $f(a) + f(-a) = 4$. b) $f(1+a) + f(1-a) = 8a^3$.
c) $f(a + 1/a) = \sqrt{(a - 1/a)^2}$.
(i) Ako je $a > 1$ tada je $a - 1/a > 0$, odakle je $f(a + 1/a) = a - 1/a$.
(ii) Za $0 < a < 1$ je $f(a + 1/a) = 1/a - a$.
(iii) Za $-1 < a < 0$ je $f(a + 1/a) = a - 1/a$.
(iv) Za $a < -1$ je $f(a + 1/a) = 1/a - a$.

2.6. *Data je funkcija* $f(x) = \log_{10} \dfrac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$. *Pokazati da je*

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

2.7. *Neka je funkcija* $f : \mathbf{R}\setminus\{-1\} \to \mathbf{R}$ *data sa* $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. *Odrediti funkcije* f_n, $n \in \mathbf{N}$, *i njihove prirodne domene, ako je*

$$f_1 = f,\ f_2 = f \circ f_1 \ \ i \ \ f_n = f \circ f_{n-1} \ \ za \ \ n = 2, 3, \ldots.$$

Rešenje. Domen funkcije f je skup $\mathbf{R}\setminus\{-1\}$. Tada je

$$f_2(x) = f \circ f_1(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{\dfrac{x}{1+x}}{1 + \dfrac{x}{1+x}} = \frac{x}{1+2x}.$$

Prirodni domen za funkciju $g(x) = \dfrac{x}{1+2x}$ je skup $\mathbf{R}\setminus\{-1/2\}$. Domen funkcije f_2 je skup $\mathbf{R}\setminus\{-1, -1/2\}$.

Koristeći matematičku indukciju, pokazaćemo da za $n = 2, 3, \ldots$ važi

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx}, \quad x \in \mathbf{R}\setminus\left\{-1, -\frac{1}{2}, \ldots, -\frac{1}{n}\right\}.$$

Formula je tačna za $n = 1$ i $n = 2$. Pretpostavimo da je formula tačna za $n = k$, $k > 1$. Tada je

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= (f \circ f_k)(x) = f(f_k(x)) = f\left(\frac{x}{1+kx}\right) \\ &= \frac{\dfrac{x}{1+kx}}{1 + \dfrac{x}{1+kx}} = \frac{x}{1+(k+1)x}, \end{aligned}$$

za $x \in \mathbf{R}\setminus\left\{-1, -\dfrac{1}{2}, \ldots, -\dfrac{1}{k}, -\dfrac{1}{k+1}\right\}$.

2.8. *Odrediti funkciju f datu sledećom formulom:*

a) $f(x+2) = \dfrac{1}{x+7}$, $x \ne -7$; b) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^3 + 1$, $x \ne 0$;

c) $f(x+1/x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$; d) $f(x^2) = 1 - |x^5|$, $x \geq 0$.

Rešenja.

a) Uvodjenjem smene $t = x+2$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{-7\}$, odnosno $x = t-2$, $t \in \mathbf{R}\setminus\{-5\}$ dobijamo $f(t) = \frac{1}{t+5}$ za $t \neq -5$.

b) $f(x) = \frac{1+x^3}{x^3}$, $x \neq 0$.

c) Kako je $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$, to se pomoću smene $t = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, dobija

$$f(t) = t^2 - 2,\ t \neq 0.$$

(Poslednja formula je definisana i za $t = 0$, medjutim mi smo nulu izostavili zbog definicije funkcije f.)

d) $f(x) = 1 - x^{5/2}$, $x \geq 0$.

2.9. *Pokazati da je kompozicija dve bijekcije (resp. surjekcije; resp. injekcije) bijekcija (resp. surjekcija; resp. injekcija).*

2.10. *Ispitati parnost, odnosno neparnost sledećih funkcija na njihovim prirodnim domenima:*

a) $f(x) = \frac{x^5}{x^2+2}$; b) $f(x) = \sin|x| + \cos x$;

c) $f(x) = \ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x}$; d) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}$;

e) $f(x) = \cos(x+1)$; f) $f(x) = |\mathrm{arctg}\, x| + \arcsin x + \arccos x$.

Rešenja.

a) Funkcija f je neparna, jer je $\forall x \in \mathbf{R}$: $f(-x) = \frac{(-x)^5}{(-x)^2+2} = -f(x)$.

b) Funkcija f je parna, jer za svako $x \in \mathbf{R}$ važi:

$$f(-x) = \sin|-x| + \cos(-x) = \sin x + \cos x = f(x).$$

c) Funkcija f je neparna, jer za svako $x \in \mathbf{R}$ važi:

$$f(-x) = \ln\frac{2-\sin x}{2+\sin x} = \ln(2-\sin x) - \ln(2+\sin x) = -f(x),$$

d) Funkcija f je neparna, jer za svako $x \in \mathbf{R}$ važi:

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{\sqrt[3]{((-x)+1)^2} + \sqrt[3]{((-x)-1)^2}} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}}.$$

e) Ni parna ni neparna, jer je, na primer, $f(1) \neq f(-1)$.

f) Funkcija $g(x) = |\mathrm{arctg}\, x|$, $x \in \mathbf{R}$, je parna, a zbog identiteta

$$\arccos x + \arcsin x = \pi/2, \quad x \in \mathbf{R},$$

(videti zadatak 2.27 b)), je i f parna funkcija.

2.11. *Pokazati da je*

a) *zbir parnih (resp. neparnih) funkcija parna (resp. neparna) funkcija;*

b) *proizvod parnih ili neparnih funkcija parna funkcija;*

c) *proizvod jedne parne i jedne neparne funkcije neparna funkcija.*

2.12. *Pokazati da se svaka funkcija definisana na intervalu $(-a,a)$ može predstaviti kao zbir jedne parne i jedne neparne funkcije.*

Rešenje. Funkcija f se može pisati u obliku zbira

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(-x)-f(x)}{2} = f_1(x) + f_2(x), \quad x \in A.$$

Sada se jednostavno pokazuje da je f_1 parna, a f_2 neparna funkcija na A.

2.13. *Ako je funkcija $f : A \to B$ periodična sa periodom T, tada je ona periodična sa periodom kT, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$. Pokazati.*

Rešenje. Metodom matematičke indukcije pokazaćemo da za svako $x \in A$ važi $f(x+kT) = f(x)$, $(k \in \mathbf{N})$. Zaista, pod pretpostavkom da je funkcija f periodična sa periodom kT, $k \in \mathbf{N}$, iz jednakosti

$$f(x+(k+1)T) = f((x+k)T+T) = f(x+kT) = f(x),$$

sledi da je funkcija f periodična sa periodom $(k+1)T$.

Na osnovu $f(x) = f(x-T+T) = f(x-T)$, sledi da je funkcija f periodična sa periodom $-T$.

2.14. *Ako je funkcija $y = f(x)$ periodična sa periodom T, tada je funkcija $g(x) = f(ax+b)$, $a \neq 0$, periodična sa periodom T/a. Pokazati.*

2.15. *Ispitati periodičnost sledećih funkcija na njihovim prirodnim domenima:*

a) $f(x) = 2\sin 5x + \cos 3x;$ b) $f(x) = \cos^2 x - \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x};$

c) $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{4} + \sin\dfrac{\pi x}{5};$ d) $f(x) = \sin\sqrt{2}x + \sin 3x;$

e) $f(x) = \sin\sqrt{x} + \sin x^2;$ f) $f(x) = \cos|x| + 3\sin|x|;$

g) $f(x) = |\cos x| + |\sin x|;$ h) $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{|\sin x|}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{|\cos x|}\right).$

Rešenja.

a) Funkcija $g_1(x) = \sin 5x$, $x \in \mathbf{R}$, je periodična sa osnovnom periodom $2\pi/5$, dok je funkcija $g_2(x) = \cos 3x$, $x \in \mathbf{R}$, periodična sa periodom $2\pi/3$. Pošto postoje celi brojevi m i n takvi da je $\dfrac{2\pi}{5}m = \dfrac{2\pi}{3}n$ ($m = 5$, $n = 3$), to je data funkcija periodična sa osnovnom periodom 2π.

b) Funkcija $g_1(x) = \cos^2 x$, $x \in \mathbf{R}$, je periodična sa osnovnom periodom π (zašto?). Funkcija $g_2(x) = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}$, $x \in \mathbf{R}$, je periodična sa osnovnom periodom π. Dakle, data funkcija f je periodična sa osnovnom periodom π.

c) Funkcija $f_1(x) = \sin\dfrac{\pi x}{4}$, $x \in \mathbf{R}$, je periodična sa osnovnom periodom 8, a funkcija $\sin\dfrac{\pi x}{5}$ je periodična sa periodom 10. Dakle, data funkcija je periodična sa osnovnom periodom 40.

d) Funkcija nije periodična, jer je $2\pi/\sqrt{2}$ osnovni period funkcije $\sin\sqrt{2}x$, dok je $2\pi/3$ osnovni period za funkciju $\sin 3x$, pa ne postoje brojevi m i n takvi da je $(2\pi/\sqrt{2})m = (2\pi/3)n$.

e) Funkcije $f_1(x) = \sin\sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ i $f_2(x) = \sin x^2$, $x \in \mathbf{R}$, nisu periodične. Naime, k-ta nula funkcije f_1 je $k^2\pi^2$, $k \in \mathbf{N}_0$, pa rastojanja između susednih nula teže ka $+\infty$. Sa druge strane, ostavljamo

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & x \in [0, \pi/2], \\ \sin x - \cos x, & x \in (\pi/2, \pi], \\ -\sin x - \cos x, & x \in (\pi, 3\pi/2], \\ -\sin x + \cos x, & x \in (3\pi/2, 2\pi]; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \in [0, \pi/2), \\ 0, & x \in (\pi/2, \pi], \\ \text{-}\operatorname{tg} x, & x \in [\pi, 3\pi/2), \\ 0, & x \in (3\pi/2, 2\pi]. \end{cases}$$

Funkcija f je periodična sa osnovnom periodom $\pi/2$, dok je funkcija g periodična sa osnovnom periodom 2π.

2.16. *Ispitati periodičnost* Dirihleove funkcije, *date sa*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Rešenje. Ako je $r \in \mathbf{Q}$, tada za svako $x \in \mathbf{R}$ važi $D(x + r) = D(x)$. Naime, zbir dva racionalna broja je racionalan broj, a zbir racionalnog i iracionalnog je iracionalan broj. Znači, svaki racionalan broj jeste period date funkcije, što takodje znači da ova funkcija *nema* najmanji (tj. osnovni) period!

Ako je $\imath$ iracioanalu broj, tada za svako $x \in \mathbf{Q}$ važi $D(\imath + x) \neq D(x)(= 0)$. Dakle, nijedan iracionalan broj nije period Dirihleove funkcije.

2.17. *Odrediti inverznu funkciju g za datu funkciju f, ako je*

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty);$

b) $f(x) = x^2 - 2x,$ $x \in (-\infty, 1);$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1},$ $x \in (0, +\infty);$

d) $f(x) = \dfrac{2^x}{1 + 2^x},$ $x \in (-\infty, +\infty);$

$$10^x - 10^{-x}$$

x i y) sledi da je inverzna funkcija g za funkciju f data sa

$$g(x) = f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

b) $g(x) = f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1+x}$ za $x \in [-1, +\infty)$.

c) $g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x^3 - 1}$, za $x \in (1, +\infty)$.

d) Za $x = \dfrac{2^y}{1+2^y}$, posle sredjivanja dobijamo traženu inverznu funkciju

$$g(x) = f^{-1}(x) = \log_2 \frac{x}{1-x} \quad \text{za} \quad x \in (0,1).$$

e) $f^{-x} = \dfrac{1}{2} \log_{10} \dfrac{x}{2-x}$ za $x \in (0, 2)$.

2.18. *Pokazati da je funkcija* $f^{-1}(x) = \dfrac{b - dx}{cx - a}$ *inverzna funkcija za funkciju* $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, *ako je* $ad - bc \neq 0$.

2.19. *Konstruisati grafike sledećih funkcija*

a) $f(x) = |x+1|$ *i* $g(x) = |x-1|$; b) $f(x) = |x+1| + |x-1|$;

c) $\dfrac{1}{|x+1|}$; d) $\ln|x+1|$;

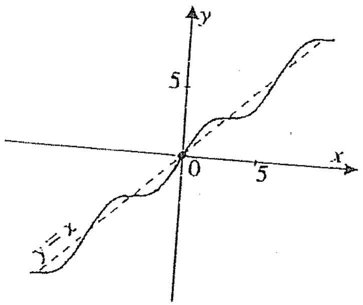
e) $f(x) = x^2$ *i* $g(x) = x^2 - 1$; f) $f(x) = |x^2 - 1|$;

g) $f(x) = x^3$; *i* $g(x) = \dfrac{1}{|x^3 - 2|}$; h) $f(x) = e^{|x^3 - 2|}$.

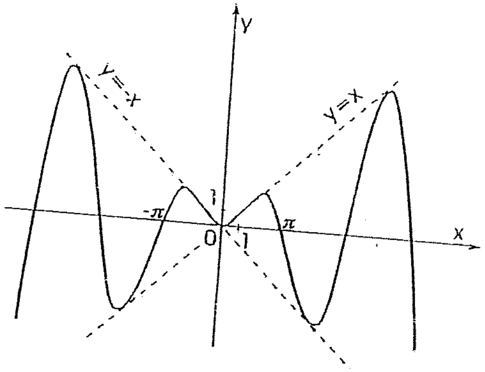
2.20. *Konstruisati grafike sledećih funkcija:*

a) $f(x) = x + \sin x$ b) $f(x) = x \sin x$; c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;

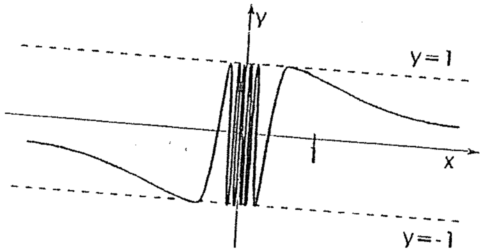
d) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; e) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$; f) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$.



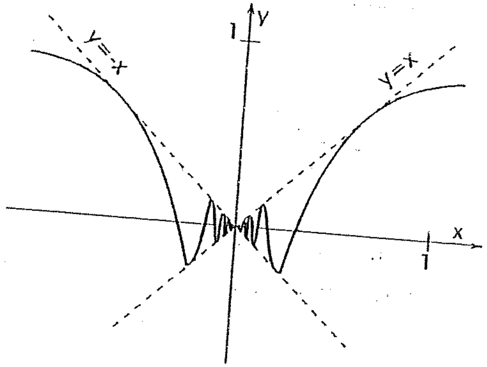
Sl. 2.1. $f(x) = x + \sin x$



Sl. 2.2. $f(x) = x \sin x$



Sl. 2.3. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$

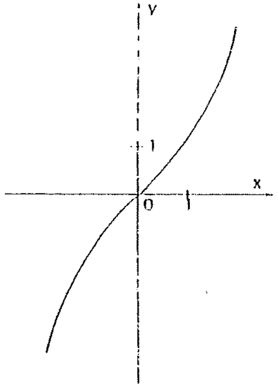


Sl. 2.4. $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

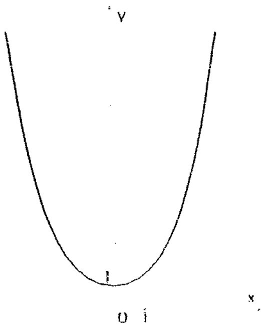
2.21. *Konstruisati grafike:*

a) $f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; b) $f(x) = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

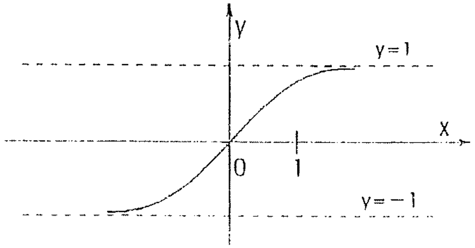
c) $f(x) = \operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$; d) $f(x) = \operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.



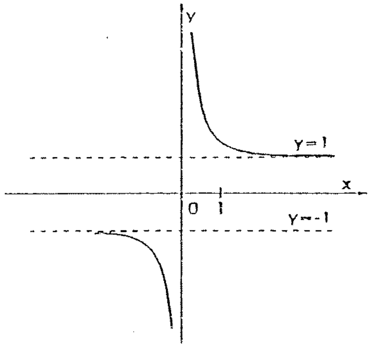
Sl. 2.5. $f(x) =$sh x



Sl. 2.6. $f(x) =$ch x



Sl. 2.7. $f(x) =$th x



Sl. 2.8. $f(x) =$cth x

2.22. *Znajući da je* $\sin x < x < \operatorname{tg} x,\ x \in (0, \pi/2)$, *pokazati sledeće nejednakosti:*

a) $|\sin x| \le |x|,\quad x \in \mathbf{R};$ b) $\cos x < \dfrac{\pi}{2} - x,\quad x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right);$

c) $\cos x \ge 1 - \dfrac{x^2}{2},\quad x \in \mathbf{R};$ d) $\cos x \ge x - \dfrac{x^3}{3},\quad x \in (0, +\infty).$

2.23. *Pokazati sledeće jednakosti:*

a) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y;$ b) $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x;$

c) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y;$ d) $\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x;$

e) $\operatorname{th}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y};$ f) $\operatorname{th}(2x) = \dfrac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.$

Uputstvo. Pošto su funkcije sh i ch definisane sa

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{i} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

to je

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x, \qquad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x, \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{2.1}$$

Na osnovu jednakosti $e^{x+y} = e^x \cdot e^y,\ x, y \in \mathbf{R}$, i relacije (2.1), sledi da za svako $x, y \in \mathbf{R}$ važe jednakosti:

$$e^{x+y} = \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{sh}(x+y) = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y), \tag{2.2}$$

$$e^{-(x+y)} = \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{sh}(x+y) = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y). \tag{2.3}$$

2.24. *Pokazati da za svako* $x, y \in \mathbf{R}$ *važe sledeće jednakosti:*

a) $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2\operatorname{ch}\dfrac{x+y}{2}\operatorname{ch}\dfrac{x-y}{2};$ b) $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2\operatorname{sh}\dfrac{x+y}{2}\operatorname{sh}\dfrac{x-y}{2};$

c) $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2\operatorname{sh}\dfrac{x+y}{2}\operatorname{ch}\dfrac{x-y}{2};$ d) $\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2\operatorname{ch}\dfrac{x+y}{2}\operatorname{sh}\dfrac{x-y}{2};$

e) $\operatorname{cth}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{cth} x \cdot \operatorname{cth} y \pm 1}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}.$

2.25. *Nacrtati grafike sledećih funkcija:*

a) $f(x) = \arcsin x;$ b) $g(x) = \arccos x;$

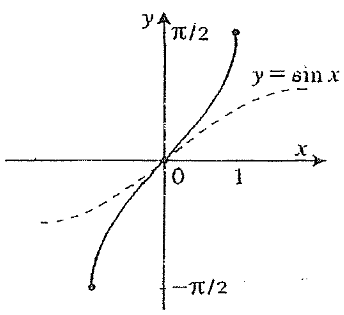
c) $h(x) = \operatorname{arctg} x;$ d) $k(x) = \operatorname{arcctg} x.$

Rešenja. Osnovne trigonometrijske funkcije *nisu* monotone na svojim definicionim skupovima. Zbog toga, da bi se uopšte mogla definisati inverzna funkcija bilo koje od njih, potrebno je prvo izvršiti restrikciju polazne osnovne trigonometrijske funkcije na interval (po mogućstvu što veći!) na kome ona jeste monotona.

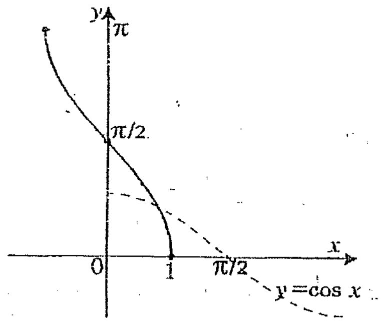
a) Funkcija $f(x) = \arcsin x$ je, po definiciji, inverzna funkcija za funkciju $F_1(x) = \sin x,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$.[1] Važno je primetiti da na intervalu $[-\pi/2, \pi/2]$ funkcija F_1 monotono raste, a da je njen skup vrednosti interval $[-1, 1]$. Zbog toga je definicioni skup funkcije f interval $[-1, 1]$, a njen skup vrednosti interval $[-\pi/2, \pi/2]$. Dalje, funkcija f je neparna, monotono rastuća i ima nulu u $x = 0$ (sl. 2.9).

---

[1] Funkcija F_1 se naziva restrikcija funkcije $F(x) = \sin x,\ x \in \mathbf{R}$, na interval $[-\pi/2, \pi/2]$.

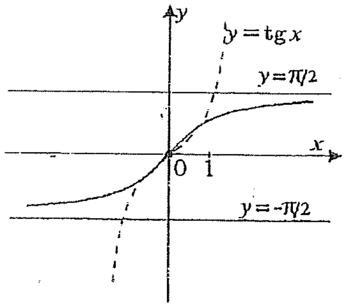


Sl. 2.9. $f(x) = \arcsin x$

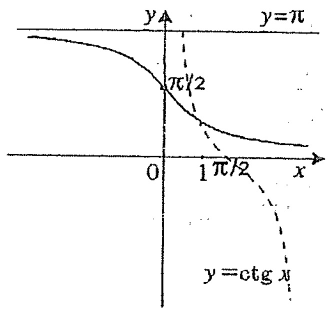


Sl. 2.10. $f(x) = \arccos x$

b) Funkcija g je inverzna za monotonu funkciju $G_1 : [0, \pi] \to [-1, 1]$ datu sa $G_1(x) = \cos x$, koja je bijekcija. (Proveriti!) Definicioni skup funkcije g jeste interval $[-1, 1]$, skup vrednosti je interval $[0, \pi]$, i monotono opada (sl. 2.10).



Sl. 2.11. $f(x) = \text{arctg}\, x$



Sl. 2.12. $f(x) = \text{arcctg}\, x$

c) Funkcija h je inverzna za monotonu funkciju

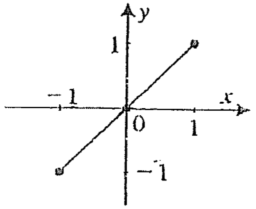
$$H_1 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R},$$

datu sa $H_1(x) = \text{tg}\, x$. Dakle, funkcija h je definisana na celom skupu $\mathbf{R}$, njen skup vrednosti je $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ monotono je rastuća i neparna (sl. 2.11).

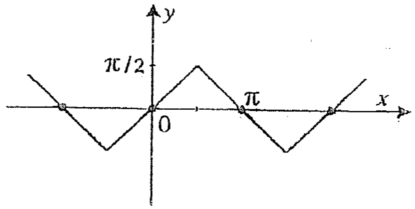
d) Funkcija k je inverzna za monotonu funkciju $K_1 : (0, \pi) \to \mathbf{R}$, datu sa $K_1(x) = \text{ctg}\, x$. Funkcija k je definisana na celom skupu $\mathbf{R}$, njen skup vrednosti je $[0, \pi]$, i monotono je opadajuća. Ova funkcija nije ni parna ni neparna (sl. 2.12).

2.26. *Konstruisati grafike sledećih funkcija:*

a) $f(x) = \sin(\arcsin x)$; b) $f(x) = \arcsin(\sin x)$.



Sl. 2.13. $f(x) = \sin(\arcsin x)$



Sl. 2.14. $f(x) = \arcsin(\sin x)$

2.27. *Pokazati sledeće jednakosti:*

a) $\arcsin x = \arccos(\sqrt{1 - x^2}), \quad |x| \le 1$;

b) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \le 1$;

c) $\text{arctg}\, x + \text{arcctg}\, x = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$;

Rešenja.

a) Za $\alpha = \arcsin x$, i $x \in [0, 1]$, uzmimo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Tada je $x = \sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ tj. $x^2 - 1 = -\cos^2 \alpha$, pa je

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow \alpha = \arccos(\sqrt{1 - x^2}).$$

b) Pre svega je $\pi/2 \leq \arcsin x + \arccos x \leq 3\pi/2$, jer je $-\pi/2 \leq \arcsin x \leq \pi/2$ i $0 \leq \arccos x \leq \pi$. Iz jednakosti

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin x + \arccos x) &= \sin(\arcsin x)\cos(\arccos x)\sin(\arccos x)\cos(\arcsin x)\\ &= x^2 + \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} = 1,\end{aligned}$$

sledi

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{za neko} \quad k \in \mathrm{Z}.$$

Pošto je $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \frac{3\pi}{2}$, to sledi da je $k = 0$.

2.28. *Pokazati*

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+y}{1 \mp xy}\right) & za \quad xy < 1, \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+y}{1 \mp xy}\right) & za \quad xy > 1; \;\; x > 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x+y}{1 \mp xy}\right) & za \quad xy > 1; \;\; x < 0, \\ \pi/2 & za \quad xy = 1; \;\; x > 0, \\ -\pi/2 & za \quad xy = 1; \;\; x < 0. \end{cases}$$

Rešenje. Iz

$$\operatorname{tg} x(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{x+y}{1-xy}, \qquad xy \neq 1$$

sledi

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + r\pi, \qquad r \in \mathrm{Z},\ xy \neq 1. \tag{2.4}$$

Kako je

$$|\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y| = \left|\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + r\pi\right| < \pi, \qquad \left|\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\right| < \frac{\pi}{2},$$

to r može uzimati vrednosti $0, 1$ i -1.

Ako se odrede kosinusi leve i desne strane u 2.4 dobija se

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}}\cos r\pi,$$

odakle je

$$\cos r\pi = \frac{1-xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\cdot\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{|1-xy|} = \frac{1-xy}{|1-xy|} = \begin{cases} 1 & xy < 1 \\ -1 & xy > 1. \end{cases}$$

Može se pokazati (geometrijski), videti [2], da je $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}$, za $x = \frac{1}{y}$, $x, y > 0$, a takodje i $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}$, za $x = \frac{1}{y}$, $x, y < 0$.

2.29. *Pokazati da za realne brojeve* $|x| \leq 1$ *i* $|y| \leq 1$ *važi*

a) $\arcsin x + \arcsin y$

$$= \begin{cases} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), & xy < 0, \;\; \textit{ili} \;\; x^2 + y^2 \leq 1, \\ \pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), & x, y > 0 \; i \;\; x^2 + y^2 > 1, \\ -\pi - \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), & x, y < 0, \; i \;\; x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

b) $\arccos x + \arccos y$

$$= \begin{cases} \arccos\left(xy\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\right), & za \;\; x + y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\right), & za \;\; x + y < 0. \end{cases}$$

Glava 3

Nizovi

3.1 Granična vrednost niza

Definicija 3.1. **Niz** *je funkcija* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Uobičajeno je da se piše $a_n := a(n)$, $n \in \mathbb{N}$, i $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Broj a_n se zove **opšti član niza** a.

U ovoj glavi n uvek označava neki prirodan broj.

Definicija 3.2. *Niz* $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *je* **ograničen** *ako postoji pozitivan realan broj* M *takav da za svako* $n \in \mathbb{N}$ *važi* $|a_n| \leq M$.

Definicija 3.3. *Realan broj* L *je* **granična vrednost niza** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *ako za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sa osobinom da za svako* $n > n_0$ *važi* $|a_n - L| < \varepsilon$, *tj.*

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists n_0 \in \mathbb{N})\, (\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_0 \;\Rightarrow\; |a_n - L| < \varepsilon .$$

Ako je L granična vrednost (kraće: **granica**) niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tada još kažemo da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergira** ka broju L i to pišemo

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L.$$

Za niz koji ne konvergira, kažemo da **divergira**. Izdvojićemo dve klase *divergentnih nizova*.

Definicija 3.4. *Niz* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

divergira u plus beskonačno, *u oznaci* $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$, *ako za svaki realan broj* $M > 0$ *postoji broj* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da za svako* $n > n_0$ *važi* $a_n > M$;

divergira u minus beskonačno, *u oznaci* $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$, *ako za svaki realan broj* $M > 0$ *postoji broj* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da za svako* $n > n_0$ *važi* $a_n < -M$.

Teorema 3.1. *Granica konvergentnog niza je jedinstvena.*

Teorema 3.2. *Svaki konvergentan niz je ograničen.*

3.1.1 Zadaci

3.1. *Pokazati da niz* $(a_n)_{n\in N}$ *konvergira ka broju* L *ako i samo ako za proizvoljno* $\varepsilon > 0$ *važe sledeća dva uslova:*

(1) za beskonačno mnogo brojeva n *je* $a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$,

(2) za najviše konačno mnogo brojeva n *je* $a_n \notin (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Uputstvo. Sledi iz definicije 3.3.

3.2. *Koristeći definiciju 3.3, pokazati da svaki od sledećih nizova, datih sa opštim članom, konvergira ka 0:*

a) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$; b) $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+3}}$; c) $c_n = \dfrac{1}{n!}$,

Rešenja. a) Pokazaćemo da za svako unapred dato pozitivno ε postoji prirodan broj n_0 takav da važi implikacija

$$n > n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Kako za svako n, sa osobinom $n > \sqrt{1/\varepsilon}$, važi $1/n^2 < \varepsilon$, to možemo uzeti $n_0 = \left[\sqrt{1/\varepsilon}\right] + 1$, pa je (3.1) zadovoljeno.

Primedba. Broj $[x]$ (čita se: "najveći ceo od x") po definiciji je najveći ceo broj manji ili jednak od realnog broja x.

U daljem radu posmatraće se $0 < \varepsilon < 1$, što ne umanjuje opštost, jer ako postoji takvo $n_0(\varepsilon)$ sa osobinom da za svako $n > n_0(\varepsilon)$ je $|f_n| < \varepsilon$, tada važi

$$(\forall \varepsilon_1 \geq 1)(\forall n > n_0(\varepsilon))\, |f_n| < \varepsilon < \varepsilon_1.$$

b) Za dato $\varepsilon > 0$ odredićemo prirodan broj n_0 tako da za svako $n > n_0$ važi

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n+3}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n+3}} < \varepsilon, \quad \text{pa možemo uzeti} \quad n_0 = \left[1/\varepsilon^2\right] + 1.$$

c) $\left|\dfrac{1}{n!} - 0\right| = \dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Odatle je $\ln(1/\varepsilon) < (n-1)\ln 2$, što znači da možemo uzeti $n_0 = 1 + \left[\dfrac{1}{\ln 2} \cdot \ln(1/\varepsilon)\right]$. U ovom slučaju za svako unapred dato pozitivno ε broj n_0 se može odrediti i na sledeći način

$$\left|\frac{1}{n!} - 0\right| = \frac{1}{n!} < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Znači, broj n_0 nije jednoznačno odredjen, ustvari, dovoljno je da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tako da važi implikacija iz definicije 3.3.

3.3. *Koristeći definiciju 3.3, pokazati:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+4}{n^2+3n-1} = 0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} (0,99)^n = 0$.

3.4. *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ *i za svako* n *važi* $x_n \geq 0$, *pokazati da je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^\alpha = 0$, $\alpha > 0$.

Rešenje. Iz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ imamo

$$(\forall \varepsilon_1 > 0)\,(\exists n_0 \in N)\,(\forall n \in N) \quad n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon_1. \tag{3.2}$$

Za dato $\varepsilon > 0$, uzmimo $\varepsilon_1 = \varepsilon^{1/\alpha}$, tada prema 3.2 postoji n_0, takvo da za $n > n_0$ važi

$$|x_n^\alpha| < \varepsilon_1^\alpha = \left(\varepsilon^{1/\alpha}\right)^\alpha = \varepsilon.$$

3.5. *Pokazati po definiciji 3.3 da sledeći nizovi imaju granicu* 1 :

a) $a_n = \dfrac{3n^2+1}{3n^2+2n+1}$; b) $b_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$; c) $c_n = \sqrt[n]{n}$.

Rešenja.

a) Iz relacije $\left|\dfrac{3n^2+1}{3n^2+2n+1} - 1\right| = \dfrac{1-2n-1}{3n^2+2n+1} < \dfrac{1}{2n^2} < \varepsilon$, sledi da za svako $\varepsilon > 0$, važi $2n^2 > 1/\varepsilon$ ili $n > \sqrt{1/(2\varepsilon)}$. Znači, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 := n_0(\varepsilon) = \left[1/\sqrt{2\varepsilon}\right] + 1$, takvo da za svako $n > n_0$ važi $\left|\dfrac{n+1}{n+2} - 1\right| < \varepsilon$.

b) Za $a = 1$, tvrdjenje je trivijalno.

Ako je $a > 1$, tj. $a = 1 + b$, $b > 0$, tada za svako $n \in N$, $n > 1$, postoji realan broj $c(n) > 0$ takav da je

$$\sqrt[n]{1+b} = 1 + c(n), \quad \text{odnosno} \quad 1 + b = (1 + c(n))^n.$$

Pomoću Bernulijeve nejednakosti $(1+k)^n \geq 1 + nk$, $k > -1$, $n \in N$, dobijamo $1 + b \geq 1 + n \cdot c(n)$, odakle imamo $c(n) \leq \dfrac{b}{n}$. Znači, za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$|\sqrt[n]{1+b} - 1| = c(n) \leq \frac{b}{n} < \varepsilon,$$

ako je $n > n_0 := [b/\varepsilon] + 1$.

Ako je $0 < a < 1$, tj. $a = 1/h$, $h > 1$, tvrdjenje se pokazuje se analogno. Znači, za bilo koje $a > 0$ važi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

c) Pomoću binomne formule $\sqrt[n]{n} = 1 + d(n)$, $d(n) > 0$, dobijamo

$$n = (1 + d(n))^n = 1 + nd(n) + \frac{n(n-1)}{2}d^2(n) + \cdots + d^n(n),$$

odakle je $n > \dfrac{n(n-1)}{2}d^2(n) \;\Rightarrow\; d(n) < \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$. Za svako $\varepsilon > 0$, važi

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = d(n) < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon, \text{ pod uslovom da je } n > \left[\frac{2}{\varepsilon^2} + 1\right].$$

3.6. *Pokazati da je:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1; \\ 1, & q = 1; \\ +\infty, & q > 1; \end{cases}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^b q^n = 0$, $|q| < 1$, $b \in \mathbb{R}$.

Rešenja.

a) Posmatraćemo prvo slučaj kada je $|q| < 1$. Stavimo tada

$$|q| = \frac{1}{1+h}, \quad h > 0.$$

Za dato $\varepsilon > 0$, na osnovu Bernoulijeve nejednakosti, važi

$$|q^n - 0| = \frac{1}{(1+h)^n} \le \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh} < \varepsilon, \quad \text{za svako } n > \frac{1}{h\varepsilon}.$$

Prema tome se može uzeti $n_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{h\varepsilon}\right] + 1$. Znači, za $|q| < 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Ako je $q = 1$, tada je svakako $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.

Ako $q > 1$, tada imamo

$$q^n = \frac{1}{r^n}, \quad 0 < r < 1, \quad \text{pa je} \quad \lim_{n\to\infty} q^n = +\infty,$$

jer je $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$.

Ako je $q \le -1$, tada niz q^n ne konvergira.

b) U slučaju $b < 0$, tvrdjenje je trivijalno, dok se za $b = 0$ svodi na a).

Ako je $b > 0$, tada možemo izabrati k, $k \in \mathbb{N}$, takvo da je $k > b$. Za $h > 0$ i $n > 2k$, tada važi

$$(1+h)^n > \binom{n}{k} h^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}h^k > \left(\frac{n}{2}\right)^k h^k \frac{1}{k!},$$

jer je

$$n > 2k \Rightarrow n > 2k - 2 \Rightarrow 2n > n + 2k - 2 \Rightarrow n - k + 1 > \frac{n}{2}.$$

Ako je $h > 0$, takvo da važi $|q| = \dfrac{1}{1+h} < 1$, tada iz prethodnog tvrdjenja imamo

$$|n^b q^n - 0| = n^b |q|^n = \frac{n^b}{(1+h)^n} < \frac{n^b 2^k k!}{n^k h^k} = \frac{2^k k!}{h^k} n^{b-k} < \frac{2^k k!}{h^k} n^{b_1 - k} < \varepsilon,$$

za svako $n > \left[\sqrt[k-b_1]{\dfrac{\varepsilon h^k}{2^k k!}}\right] + 1$, gde je $b_1 \in \mathbb{Q}$ takvo da je $b < b_1 < k$.

3.7. *Pokazati po definiciji 3.3 da je:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + 5^n}{5^n + 3 \cdot 2^n} = 1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n \sin n^3}{3^{n-1} + 3n} = 3$.

3.8. *Neka je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$. *Pokazati da je tada:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = L^2$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |L|$.

3.9. *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$, *da li je* $\lim x_n = a$?

Rešenje. Ne mora. Na primer, za niz $x_n = (-1)^n$, važi $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 1$, medjutim ovaj niz ne konvergira.

3.10. *Iskazati da* $L \ne \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *u smislu definicije 3.3 i dati geometrijsku interpretaciju.*

Rešenje. Tačka L nije granica niza $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ako

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall M)(\exists n \in \mathbb{N}) \quad n > M \;\Rightarrow\; |a_n - L| > \varepsilon.$$

Geometrijski, $L \ne \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ znači da postoji $\varepsilon > 0$ tako da izvan intervala $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ ima beskonačno mnogo članova niza x_n.

3.11. *Dati geometrijsku interpretaciju definicije ograničenih nizova.*

Rešenje. Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničen ako postoji broj M takav da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $|a_n| \le M$, tj. $-M \le a_n \le M$. Geometrijski, to znači da su svi članovi niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ smešteni u interval $[-M, M]$.

3.12. *Pokazati da su nizovi*
a) $x_n = 2^{n(-1)^n}$; b) $x_n = n^{(-1)^n}$,
neograničeni. Ispitati da li divergiraju ka $+\infty$ *ili ka* $-\infty$.

Rešenje.

a) Pokazaćemo da za svako $M > 0$ postoji $n \in \mathrm{N}$ da je $|x_n| > M$. Za proizvoljno $M > 0$ i proizvoljan paran broj n takav da je $n > \log_2 M$ važi $x_n = 2^n > 2^{\log_2 M}$.

b) Za svako M i $n = 2([M]+1) > M$, je $x_n = (2([M]+1))^{(-1)^{2([M]+1)}} = n > M$.

Ni jedan od ova dva niza ne divergira ka $+\infty$, niti ka $= -\infty$, niti konvergira.

3.2 Osobine konvergentnih nizova

Teorema 3.3. *Ako su* $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *konvergentni nizovi, i ako postoji* $n_0 \in \mathrm{N}$ *sa osobinom* $(\forall n \in \mathrm{N}) \quad n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n \le b_n$, *tada važi* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Teorema 3.4. *Ako za nizove* $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *i* $(c_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *postoji broj* $n_0 \in \mathrm{N}$ *sa osobinom* $(\forall n \in \mathrm{N}) \quad n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n \le b_n \le c_n$, *tada važi implikacija* $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L\right)$.

Teorema 3.5. *Ako nizovi* $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *konvergiraju, tada važi*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, *uz uslov* $b_n \neq 0$ *za svako* $n \in \mathrm{N}$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}(A \cdot a_n) = A \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, *gde je* A *proizvoljna konstanta;*

e) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^k = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^k$, *gde je* k *prirodan broj;*

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$ *gde je* $k \in \mathrm{N}$.
U f), ako je k *paran broj, mora se dodatno pretpostaviti da su članovi niza* $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *nenegativni.*

3.2.1 Zadaci

3.13. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+2n}{n^3+1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+5^n}{(-2)^{n+1}+5^{n+1}}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-1}-n)$; f) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)$.

Rešenja. a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^2+2n}{n^3+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+\frac{2}{n}}{n+\frac{1}{n^2}} = 0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n}{n-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-\sqrt{n})(n+\sqrt{n})}{n-\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt{n}) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n!)}{\sqrt[3]{n}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}} = 0$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+5^n}{(-2)^{n+1}+5^{n+1}} = \dfrac{1}{5} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{(-2)^n}{5^n}+1}{\frac{(-2)^{n+1}}{5^{n+1}}+1} = 5$.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-1}-n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n^2-1}-n)(\sqrt{n^2-1}+n)}{(\sqrt{n^2-1}+n)} = \dfrac{-1}{(\sqrt{n^2-n}+n)}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{(\sqrt{n^2+2n}+n)} = 1$.

3.14. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{9-\dfrac{1}{n^2}}$; b) $x_n = \left(32+\dfrac{1}{n^5}\right)^{-1/5}$;

c) $x_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$; d) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n+12}+n}$;

e) $x_n = \dfrac{n!+(\sin(n!))^2}{2(n+1)!+3}$; f) $x_n = \sqrt[3]{n}\cdot\left(\sqrt[3]{n-1}-\sqrt[3]{n+1}\right)$.

Rezultati.

a) 3. b) 1/2. c) 1. d) 1 e) 0. f) $-2/3$.

3.15. *Pokazati da je:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0, \quad a > 1;$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0, \quad a > 1.$

Rešenja.

a) Neka je $m \in Z$ i $m \geq k$. Tada je

$$0 < \frac{n^k}{a^n} \leq \frac{a^m}{a^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[m]{a^n}}\right)^m = \left(\frac{n}{b^n}\right)^m,$$

gde je $b = \sqrt[m]{a} > 1$. Dalje je

$$\frac{n}{b^n} = \frac{1}{(1+(b-1))^n} = \frac{n}{1+n(b-1)+\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2+\ldots+(b-1)^n} < \frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2}.$$

Znači, imamo $0 < \dfrac{n^k}{a^n} < \dfrac{n}{b^n} < \dfrac{2n}{n(n-1)(b-1)^2}$.

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n(n-1)(b-1)^2} = 0$, to je po teoremi 3.4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0, \quad a > 1.$$

b) Na osnovu a) je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{b^n} = 0$, za $b > 1$. Za dovoljno veliko n tada važi

$$\frac{1}{b^n} < \frac{n}{b^n} < 1.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Uvedimo broj $a > 1$ kao $b = a^\varepsilon$. Tada imamo

$$\frac{1}{a^{n\varepsilon}} < \frac{n}{a^{n\varepsilon}} < 1, \qquad \text{ili} \qquad 1 < n < a^{n\varepsilon}.$$

Posle logaritmovanja dobijamo $0 < \log_a n < \varepsilon n$, odnosno $0 < \dfrac{\log_a n}{n} < \varepsilon$, za $n \geq$. Iz poslednje nejednakosti sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, \quad a > 1.$$

3.16. *Pokazati da je:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0, \quad a \in \mathbf{R};$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^a}{n!} = 0, \quad a \in \mathbf{R}.$

Rešenja.

a) Ako je $|a| < 1$, tada iz zadataka 3.6 a) i 3.2 c) sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

Ako je $|a| > 1$, tada postoji $k \in N$ tako da je

$$\frac{|a|}{k} \geq 1 \quad \text{i} \quad \frac{|a|}{k+1} < 1.$$

Tada možemo pisati

$$0 \leq \left|\frac{a}{n!}\right| < \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdot \frac{|a|}{3} \cdots \frac{|a|}{k} \left(\frac{|a|}{k+1}\right)^{n-k} = M \cdot \left(\frac{|a|}{k+1}\right)^{n-k},$$

gde je M konstanta koja ne zavisi od n. Kako je

$$\lim_{n\to\infty} M \cdot \left(\frac{|a|}{k+1}\right)^{n-k} = 0.$$

to iz teoreme 3.4 sledi da $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$ postoji i jednak je nuli.

b) Pretpostavimo da je $a > 0$ (ostali slučajevi su trivijalni) i neka prirodni brojevi k i n zadovoljavaju sledeću nejednakost

$k > a$ i $n > 2k$, pa je $n-k+1 > \dfrac{n}{2}, \ldots, n > \dfrac{n}{2}$.

Iz procene

$$\frac{n^a}{n!} < \frac{n^k}{n!} = \frac{n^k}{(n-k)!\,(n-k+1)(n-k+2)\cdots n} < \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{n^k}{\left(\frac{n}{2}\right)^k} = \frac{2^k}{(n-k)!},$$

sledi da za svako $\varepsilon > 0$, postoji prirodan broj $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takav da važi

$$\left|\frac{n^a}{n!}\right| < \frac{2^k}{(n-k)!} < \frac{2^k}{n-k} < \varepsilon,$$

za svako $n > n_0$. Na primer, $n_0 = k + 1 + \left[2^k/\varepsilon\right]$.

3.17. *Pokazati da je:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^n} = 0;$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[r]{1+x_n} = 1,$ *ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$

Rešenje.

a) Za svako $n \geq 3a$ je $0 < \left(\dfrac{a}{n}\right)^n \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, to je i $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a}{n}\right)^n = 0$.

b) Ako je $x_n \geq 0$, tada je

$$1 \leq \sqrt[r]{1+x_n} \leq \left(\sqrt[r]{1+x_n}\right)^r = 1 + x_n = 1 + |x_n|.$$

Ako je $x_n \leq 0$, tada je

$$1 \geq \sqrt[r]{1+x_n} \geq \left(\sqrt[r]{1+x_n}\right)^r = 1 + x_n = 1 - |x_n|.$$

Odatle je

$$1 - |x| \leq \sqrt[r]{1+x_n} \leq 1 + |x_n|.$$

Iz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, sledi da je

$$\lim_{n\to\infty}(1 + |x_n|) = \lim_{n\to\infty}(1 - |x_n|) = 1.$$

Prema tome je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[r]{1+|x_n|} = 1.$

3.18. *Odrediti granične vrednosti sledećih nizova:*

a) $x_n = \dfrac{n^4 + 4^n}{n + 4^{n+1}}$; b) $x_n = \left(\dfrac{1997}{n}\right)^n$;

c) $x_n = \dfrac{16^n + n!}{4^n + (n+1)!}$; d) $x_n = \dfrac{3^{n^2-2n} + n^3}{(n^3)!}$.

Rezultati. a) 1/4. b) 0. c) 0. d) 0.

3.19. *Odrediti granične vrednosti sledećih nizova:*

a) $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{3} - 3}{1 + \sqrt[n]{1997}}$; b) $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{64} - 1}{\sqrt[n]{8} - 1}$;

c) $x_n = \dfrac{1}{1 - \sqrt[n]{3}} - \dfrac{2}{1 - \sqrt[n]{9}}$; d) $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{n^5} + \sqrt[n]{5}}{5\sqrt[n]{n^2} + \sqrt[n]{5n}}$;.

Rezultati. a) -1. b) 2. c) $-1/2$. d) 1/3.

3.20. *Odrediti granične vrednosti sledećih nizova:*

a) $x_n = \dfrac{n^{11} - 1}{2 + n1.01^n}$; b) $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{10}{n} - \left(\dfrac{2}{2.1}\right)^n}$;

c) $x_n = \dfrac{n + \log n}{n + 1}$; d) $x_n = \dfrac{\log_5(n^2+2)}{n}$.

Rezultati. a) 0 b) 1. c) 1. d) 0.

3.21. *Odrediti granične vrednosti sledećih nizova:*

a) $x_n = \dfrac{1 - 2 + 3 - \cdots + (2n-1) - 2n}{\sqrt{n^2+1}}$;

b) $z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+2}}\right)$.

Rešenja.

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1 - 2 + 3 - \cdots + (2n-1) - 2n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2+1}} = -1.$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+2}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{4}}{-2} + \frac{\sqrt{4}+\sqrt{6}}{-2} + \cdots + \frac{\sqrt{2n}-\sqrt{2n+2}}{-2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-2\sqrt{n}} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2n+2}}{-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-2\sqrt{n}} \frac{2-2n-2}{\sqrt{2}+\sqrt{2n+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3.22. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)^2}{n^3}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[2^n]{2}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^n}$.

Rešenje.

a) Matematičkom indukcijom se pokazuje (vidi zadatak 1.5 b)) da je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1},$$

odakle je $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$.

b) Na osnovu zadatka 1.5 b) imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(4n^2-1)}{3}}{n^3} = 4/3.$$

c) Kako je

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2} = 2^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\frac{1}{2^n}\right)} = 2^{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{2}{2^{1/2^n}},$$

odnosno

$$\begin{aligned} 2 &= \left(2^{1/2^n}\right)^{2^n} = \left(1+\left(2^{1/2^n}-1\right)\right)^{2^n} > \left(1+\left(2^{1/2^n}-1\right)\right)^{n} \\ &= 1+n\left(2^{1/2^n}-1\right)+\ldots+\left(2^{1/2^n}-1\right)^{n} > n\left(2^{1/2^n}-1\right). \end{aligned}$$

Zbog $0 < 2^{1/2^n}-1 < \frac{1}{n}$, imamo

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2} = 2, \qquad \text{jer je } \lim_{n\to\infty}2^{1/2^n} = 1.$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+3+3^2+\ldots+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1-2^{n+1}}{1-2}}{\dfrac{1-3^{n+1}}{1-3}} = 2.$$

3.23. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}k^4}{n^5}$; b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

Rešenje.

a) Označimo sa $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}k^4$ i potražimo S_n u obliku

$$S_n = An^5+Bn^4+Cn^3+Dn^2+En+F.$$

Tada iz razlike

$$\begin{aligned} S_{n+1}-S_n = {} & A((n+1)^5-n^5)+B((n+1)^4-n^4)+C((n+1)^3-n^3) \\ & +D((n+1)^2-n^2)+((n+1)-n), \end{aligned}$$

dobijamo da je za svako $n\in\mathbb{N}$ (zbog $(n+1)^4 = n^4+4n^3+6n^2+4n+1$)

$$\begin{aligned} (n+1)^4 &= 5An^4+(10A+4B)n^3+(10A+6B+3C)n^2 \\ &\quad +(5A+4B+3C+2D)n+A+B+C+D+E. \end{aligned}$$

Izjednačavanjem koeficijenata dobijamo

$$5A = 1, \qquad 10A+4B = 4,$$

$$10A+6B+3C = 6, \qquad 5a+4B+3C+2D = 4,$$

$$A+B+C+D+E = 1,$$

odakle je $A = \frac{1}{5}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = 0$, $E = -\frac{1}{30}$. Prema tome je

$$S_n = \frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n+F.$$

Za $n = 1$ je $1 = \frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{30}+F$, odakle je $F = 0$. Na osnovu toga je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}k^4}{n^5} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n}{n^5} = \frac{1}{5}.$$

b) Obeležimo sa f_n, $n\in\mathbb{N}$ opšti član datog niza. Tada je

$$\begin{aligned} \frac{f_n}{2} &= f_n-\frac{f_n}{2} = \frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\left(\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Tako dobijamo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}f_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}\right) \\ &= 3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}}-2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 3. \end{aligned}$$

3.24. *Odrediti granične vrednosti sledećih nizova:*

a) $$x_n = \frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)};$$

b) $$y_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right);$$

c) $$z_n = \left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right);$$

d) $$w_n = \frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}.$$

Rešenja. a) Na osnovu jednakosti

$$x_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

imamo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$.

b) Pomoću identiteta $1-\frac{1}{j^2} = \frac{(j-1)(j+1)}{j^2}$, $j = 2,3,...,n$, dobijamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} y_n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c) Zbog $1-\frac{1}{\frac{j(j+1)}{2}} = \frac{(j-1)(j+2)}{j(j+1)}$, $j = 2,3,...,n$, imamo

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1\cdot4}{2\cdot3}\cdot\frac{2\cdot5}{3\cdot4}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n} = \frac{1}{3}.$$

d) Za $j = 2,3,...,n$, je

$$\frac{j^3-1}{j^3+1} = \frac{(j-1)(j^2+j+1)}{(j+1)(j^2-j+1)} = \frac{(j-1)(j^2+j+1)}{(j+1)((j-1)^2+(j-1)+1)},$$

odnosno

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1\cdot7}{3\cdot3}\cdot\frac{2\cdot13}{4\cdot7}\cdot\frac{3\cdot21}{5\cdot13}\cdot\frac{4\cdot34}{6\cdot21}\right.$$

$$\left.\cdots\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)((n-1)^2+(n-1)+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} = \frac{2}{3}.$$

3.25. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right);$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)},\quad a>0.$$

Rešenja.

a) Iz nejednakosti

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\text{i}\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

na osnovu teoreme 3.4 dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1.$$

b) Ako je $0 < a < 1$, to imamo

$$0 < \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} < a^n,$$

pa pošto je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, to sledi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} = 0.$$

Ako je $a > 1$, tada je

$$0 < \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} < \frac{a^n}{a\cdot a^2\cdots a^n} = \frac{a^n}{a^{n(n+1)/2}},$$

pa je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} = 0$.

Ako je $a = 1$, tada je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{2\cdot2\cdots2}_{n-\text{članova}}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0.$$

3.26. *Pokazati da postoje nizovi* $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *takvi da je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, *ali važi:*

a) $(a_n+b_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *konvergira;* b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = -\infty$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = +\infty$;

d) *niz* $(a_n + b_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *niti konvergira niti divergira ka* $+\infty$ *ili ka* $-\infty$.

Rešenja. Na primer, možemo koristiti sledeće nizove

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n} + n^3$, $\quad b_n = \dfrac{1}{n} - n^3$; $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{n} = 1.$

b) $a_n = n$, $\quad b_n = \dfrac{1}{n+3} - 2n$; $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+3} - n\right) = -\infty.$

c) $a_n = n^2$, $\quad b_n = -n$; $\qquad \lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - n) = +\infty.$

d) Za $a_n = (-1)^n + n^2$, $\quad b_n = -n^2$; niz $(a_n + b_n)_{n\in\mathrm{N}}$ ne konvergira i ne divergira ka $+\infty$ niti ka $-\infty$.

3.27. *Pokazati da postoje nizovi* $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *takvi da* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, *ali ipak važi:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$; $\qquad$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = A,\ A > 0$; $\qquad$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$;

d) *niz* $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathrm{N}}$ *niti konvergira niti divergira ka* $+\infty$ *ili* $-\infty$.

3.28. *Neka je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *i za sve* $n \in \mathrm{N}$ *važi* $y_n \geq Cx_n$, $C > 0$. *Pokazati da je*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty.$$

3.29. *Neka je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ *gde je ili* $b = \infty$, *ili* $b = -\infty$. *Pokazati sledeće:*

a) *Ako je* $y_n \geq c > 0$, *za svako* $n \in \mathrm{N}$, *tada je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = b$.

b) *Ako je* $y_n \leq c < 0$, *za svako* $n \in \mathrm{N}$, *tada je* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = -b$.

3.30. *Pokazati da niz* $(\sin n)_{n\in\mathrm{N}}$ *nije konvergentan.*

Rešenje. Pretpostavimo suprotno tj. da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = L$. Tada je i $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+2) = L$, pa je $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin(n+2) - \sin n) = 0$, odakle je $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n+1) = 0$ (jer je $\sin(n+2) - \sin n = 2\sin 1\cos(n+1)$,). Na osnovu transformacija $\cos(n+1) = \cos n\cos 1 - \sin n \sin 1$, odnosno $\sin n = \dfrac{\cos n\cos 1 - \cos(n+1)}{\sin 1}$, možemo pisati da je $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = \lim\limits_{n\to\infty} \sin n = 0$, odakle dobijamo da je $L = 0$. Medjutim, ovo je u suprotnosti sa osnovnim trigonometrijskim identitetom $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$. Prema tome pretpostavka da niz $(\sin n)_{n\in\mathrm{N}}$ konvergira je pogrešna.

3.3 Košijevi nizovi

Definicija 3.5. *Niz* $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *je Košijev, ako zadovoljava uslov*

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathrm{N})\,(\forall\, m \in \mathrm{N})\,(\forall n \in \mathrm{N}) m, n > n_0 \;\Rightarrow\; (|a_m - a_n| < \varepsilon). \quad (3.3)$$

Uslov 3.3 se može zameniti sa ekvivalentnim uslovom

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathrm{N})\,(\forall n \in \mathrm{N})\,(\forall p \in \mathrm{N}) \quad n > n_0 \;\Rightarrow\; |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Teorema 3.6. *Potreban i dovoljan uslov da niz realnih brojeva konvergira jeste da je Košijev.*

Primedba. Metrički prostor u kome važi teorema 3.6 se naziva kompletan. Dakle, skup $\mathbf{R}$ sa uobičajenom topologijom je kompletan metrički prostor.

3.3.1 Zadaci

3.31. *Ispitati da li su sledeći nizovi Košijevi.*

a) $a_n = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$; $\qquad$ b) $b_n = \dfrac{\sin 1}{1\cdot 2} + \dfrac{\sin 2}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{\sin n}{n(n+1)}$;

c) $c_n = \dfrac{\cos 1!}{1} + \dfrac{\cos 2!}{2^2} + \cdots + \dfrac{\cos n!}{n^2}$; $\qquad$ d) $d_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$;

e) $e_n = 1 + \dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 3} + \cdots + \dfrac{1}{\ln n}$.

Rešenja. a) Na osnovu definicije 3.4, pokazaćemo da za svako $\varepsilon > 0$, možemo odrediti $n_0 = n_0(\varepsilon)$, takvo da za svako $n \geq n_0$ i za svako $p \in \mathrm{N}$, važi $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. Prvo imamo

$$|a_{n+p} - a_n| = \left|1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} - 1 - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{3^n}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{3^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{3^{n+p}}\right| \leq \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{3^n}}{1 - \dfrac{1}{3}} < \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{\dfrac{2}{3}} = \frac{1}{2\cdot 3^n}.$$

Iz nejednakosti $|a_{n+p} - a_n| < \dfrac{1}{3^n} < \varepsilon$, za svako $n > \left[\dfrac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}\right] + 1$, sledi da možemo uzeti $n_0 = n_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{-\ln\varepsilon}{\ln 2}\right] + 1$. Niz $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ je Košijev, pa je prema teoremi 3.6 i konvergentan niz.

b) Za dato $\varepsilon > 0$ i proizvoljno $p \in \mathrm{N}$, imamo

$$|b_{n+p} - b_n| = \left|\frac{\sin 1}{1\cdot 2} + \frac{\sin 2}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\sin n}{n(n-1)} + \frac{\sin(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right.$$

$$\left. + \frac{\sin(n+p)}{(n+p-1)(n+p)} - \frac{\sin 1}{1\cdot 2} - \frac{\sin 2}{2\cdot 3} - \cdots - \frac{\sin n}{n(n+1)}\right|$$

$$\leq \frac{|\sin(n+1)|}{(n+1)(n+2)} + \frac{|\sin(n+2)|}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{|\sin(n+p)|}{(n+p)(n+p+1)}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+p+1)} < \frac{1}{(n+1)} < \varepsilon.$$

Znači, za svako $\varepsilon > 0$ i $n > [1/\varepsilon] + 1$ je $|b_{n+p} - b_n| < \varepsilon$, što znači da je niz $(b_n)_{n\in \mathrm{N}}$ Košijev.

c) Niz $(c_n)_{n\in \mathrm{N}}$ je Košijev zato što za dato $\varepsilon > 0$ važi

$$|c_{n+p} - c_n| = \left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)^2} + \frac{\cos(n+2)!}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)^2}\right|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

pod uslovom da je $n > [1/\varepsilon] + 1$.

d) U ovom slučaju niz $(d_n)_{n\in \mathrm{N}}$ nije Košijev. To znači da postoji $\varepsilon > 0$ takvo da za svako n_0 postoje $n > n_0$ i $p \in \mathrm{N}$ takvi da je $|d_{n+p} - d_n| > \varepsilon$.

Uzmimo $\varepsilon = 1/4$. Iz

$$|d_{n+p} - d_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p},$$

sledi da za $n = p$ imamo

$$|d_{n+p} - d_n| = |d_{2n} - d_n| \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{4}, \quad \text{za svako} \quad n \in \mathrm{N}.$$

Prema tome, harmonijski niz, $(d_n)_{n\in \mathrm{N}}$ nije Košijev i zato ne konvergira.

e) Niz $(e_n)_{n\in \mathrm{N}}$ divergira, zato što iz nejednakosti $\ln x < x$, koja važi za $x > 0$, sledi da za $\varepsilon = 1/3$ imamo

$$|e_{n+p} - e_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \cdots + \frac{1}{\ln(n+p)} > \frac{p}{\ln(n+p)} > \frac{p}{n+p}.$$

Za $p = n$ dobijamo

$$|e_{n+p} - e_n| > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}.$$

3.4 Tačke nagomilavanja i podnizovi

Definicija 3.6. *Realan broj ℓ je* **tačka nagomilavanja** *niza $(a_n)_{n\in \mathrm{N}}$, ako za svako $\varepsilon > 0$ i svako $m \in \mathrm{N}$ postoji bar jedno $n \in \mathrm{N}$, $n > m$, takvo da je $|a_n - \ell| < \varepsilon$.*

Ekvivalentan iskaz za definiciju 3.6 jeste da je realan broj ℓ tačka nagomilavanja niza $(a_n)_{n\in \mathrm{N}}$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n sa osobinom $a_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

Definicija 3.7. *Neka je niz $(a_n)_{n\in \mathrm{N}}$ definisan sa funkcijom a, tj. $a(n) = a_n$, $n \in \mathrm{N}$.* **Podniz** *$(a_{n_k})_{k\in \mathrm{N}}$ niza $(a_n)_{n\in \mathrm{N}}$ je restrikcija funkcije a na beskonačan podskup $\{n_k | \; k \in \mathrm{N}\}$ skupa N, čiji elementi zadovoljavaju nejednakosti $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$.*

Teorema 3.7. *Proizvoljan podniz konvergentnog niza konvergira ka istoj granici kao i sam niz.*

Podniz $(f_{n_k})_{n\in \mathrm{N}}$ niza $(f_n)_{n\in \mathrm{N}}$ koji ima osobinu $f_{n_k} = \ell$ za neko ℓ i za sve $k \in \mathrm{N}$ se zove **stacionarni podniz**. Ustvari, tada je ℓ tačka nagomilavanja niza $(f_n)_{n\in \mathrm{N}}$.

Definicija 3.8.

- **Limes inferior** *niza $(a_n)_{n\in \mathrm{N}}$ jeste broj* $\mathcal{I} = \lim\limits_{n\to\infty}(\inf\{a_m | \; m \geq n\})$.
- **Limes superior** *niza $(a_n)_{n\in \mathrm{N}}$ jeste broj* $\mathcal{S} = \lim\limits_{n\to\infty}(\sup\{a_m | \; m \geq n\})$.

Svaki od poslednja dva limesa ili postoji u običnom smislu, tj. u smislu definicije 3.3, ili je $+\infty$ ili $-\infty$ (vidi definiciju 3.4). U svakom od ova dva slučaja pišemo da je

$$\mathcal{I} = \liminf_{n\to\infty} a_n \quad \text{i} \quad \mathcal{S} = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Napomenimo da je *limes inferior* kao i *limes superior* niza najmanja, odnosno najveća tačka nagomilavanja niza respektivno.

3.4.1 Zadaci

3.32. *Pokazati da je tačka ℓ tačka nagomilavanja niza $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ ako je ispunjen bar jedan od sledeća dva uslova:*

(tn1) *skup $\{n|\ f_n = \ell\}$ je beskonačan;*

(tn2) *za svako $\varepsilon > 0$, skup $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \cap \{f_n|\ n \in \mathrm{N}\}$ je beskonačan.*

Rešenje. Ako je skup $M_1 = \{n|\ f_n = \ell\}$ beskonačan, tada njegove elemente možemo urediti u monotono rastući niz koji divergira ka $+\infty$. Neka je $f_{n_k} = \ell$ za $k \in \mathrm{N}$ i $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots \to +\infty$. To znači da za svako $m \in \mathrm{N}$ postoji $n_k \in M_1$, takvo da važi $n_k > m$. Tada, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, imamo

$$|f_{n_k} - \ell| = |\ell - \ell| < \varepsilon,$$

što znači da iz uslova (tn1) sledi da je ℓ tačka nagomilavanja niza $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$.

Ako je za svako $\varepsilon > 0$, skup $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \cap \{f_n|\ n \in \mathrm{N}\}$ beskonačan, tada se skup $M_2 = \{n|\ |f_n - \ell| < \varepsilon\}$ može urediti u monotono rastući niz $n_1 < n_2 < \ldots$ koji divergira ka $+\infty$. To znači da za svako $m \in \mathrm{N}$, postoji $k \in \mathrm{N}$, takvo da je $n_k \in M_2$ i $n_k > m$. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ imamo

$$|f_{n_k} - \ell| < \varepsilon,$$

što znači da iz uslova (tn2) sledi da je ℓ tačka nagomilavanja niza $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$.

3.33. *Ako je ℓ tačka nagomilavanja niza $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$, tada je bar jedan od dva uslova ispunjen (tn1) ili (tn2) iz zadatka 3.32 ispunjen. Pokazati.*

Rešenje. Neka je ℓ tačka nagomilavanja niza $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ i neka uslov (tn1) nije ispunjen (što znači da niz $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ nema stacionaran podniz $(f_{n_k})_{n\in\mathrm{N}}$ sa osobinom $(f_{n_k})_{k\in\mathrm{N}} = \ell$, za svako $k \in \mathrm{N}$). Pokazaćemo da je u tom slučaju uslov (tn2) ispunjen.

Pretpostavimo da to nije tačno, odnosno da postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je skup $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \cap \{f_n|\ n \in \mathrm{N}\}$ konačan. Ako je n_1 najmanji prirodan broj takav da je $n > n_1 \Rightarrow f_n \neq \ell$, tada pretpostavka znači da konačan skup $(\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon) \cap \{f_n|\ n \in \mathrm{N}\}$ je ili prazan ili postoji prirodan broj $n_2 > n_1$ takav da za svako $n > n_2 \Rightarrow f_n \notin (\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon)$. To znači da tačka ℓ nije tačka nagomilavanja niza $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$, što je kontradikcija.

Primedba. Tvrdjenja u zadacima 3.32 i 3.33 se zajedno mogu izraziti kao: *Realan broj ℓ je tačka nagomilavanja niza $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ ako i samo ako niz $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ ima stacionaran podniz čiji su svi elementi jednaki sa ℓ, ili u svakoj okolini tačke ℓ ima beskonačno mnogo članova niza $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$.*

3.34. *Pretpostavimo da je $\mathcal{I} = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ realan broj. Pokazati da je tada $\mathcal{I}$ najmanja tačka nagomilavanja niza $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$.*

Rešenje. Niz $f_n = \inf\{a_m|\ m > n\}$ je monotono neopadajući, pa iz definicije 3.8 sledi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \mathcal{I}$. Tada, za dato $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $n_0 = n_0(\varepsilon)$, takav da važi

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \mathcal{I} - \varepsilon < f_n \leq \mathcal{I} + \varepsilon.$$

Iz definicije niza $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$, sledi da za svako $n \in \mathrm{N}$ postoji broj $m_n = m_n(\varepsilon) \geq n_0$ sa osobinom $f_n \leq a_{m_n} \leq f_n + \varepsilon$. Brojevi m_n se mogu izabrati tako da niz $(m_n)_{n\in\mathrm{N}}$ bude monotono rastući. Tada za svako m_n važi

$$\mathcal{I} - \varepsilon \leq a_{m_n} \leq \mathcal{I} + \varepsilon.$$

Prema tome $\mathcal{I}$ jeste tačka nagomilavanja niza $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$. Potrebno je još pokazati da je to i najmanja tačka nagomilavanja. Iz implikacije

$$n > n_0 \wedge m > n \Rightarrow \mathcal{I} - \varepsilon \leq f_n \leq a_m$$

i zbog proizvoljno izabranog broja $\varepsilon > 0$, sledi da je $\mathcal{I}$ najmanja tačka nagomilavanja niza $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$.

Primedbe.

1. Za niz $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ koji nije ograničen sa donje strane očevidno važi

$$\lim_{n\to\infty}(\inf\{a_m|\ m \leq n\}) = -\infty.$$

Uobičajeno je da se piše $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Medjutim jednostavno se može naći primer niza $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ koji je takav da je $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Na primer $a_n = n$, $n \in \mathrm{N}$.

2. U prethodnom zadatku je pokazano da tačka $\mathcal{I}$ za koju je $\mathcal{I} = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ ustvari najmanja tačka nagomilavanja niza $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$. Na osnovu toga može se pokazati da za svako $\varepsilon > 0$

   - postoji beskonačno mnogo članova niza a_n za koje važi $a_n < \mathcal{I} + \varepsilon$;
   - postoji najviše konačno mnogo članova niza a_n za koje važi $a_n < \mathcal{I} - \varepsilon$.

3. Slično kao u zadatku 3.34, može se pokazati da je tačka $\mathcal{S} = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ najveća tačka nagomilavanja niza $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$. Može se pokazati da za svako $\varepsilon > 0$

   - postoji beskonačno mnogo članova niza a_n za koje važi $a_n > \mathcal{S} - \varepsilon$;

- postoji najviše konačno mnogo članova niza a_n takvih da je $a_n > S + \varepsilon$.

3.35. *Odrediti tačke nagomilavanja za sledeće nizove:*

a) $f_n = (-1)^n, \quad n \in \mathrm{N}$; b) $g_n = \dfrac{n}{n+1} \sin \dfrac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathrm{N}$;

c) $a_n = n^2 + (-1)^n n^2, \quad n \in \mathrm{N}$.

Rešenja.

a) Niz ima dve tačke nagomilavanja $\ell_1 = 1$ i $\ell_2 = -1$, jer je $f_{2k} = 1$ i $f_{2k+1} = -1$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$ (uslov (tn1) iz zadatka 3.32). Očevidno je da je $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = -1$ i $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n = 1$.

b) Niz ima tri tačke nagomilavanja $0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, jer je

$$g_{3k} = \frac{3k}{3k+1} \sin(2\pi k) = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} g_{3k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k+1}{3k+2} \sin\left(2k\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$g_{3k+2} = \frac{3k+2}{3k+3} \sin\left(2k\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Prema tome je $\liminf\limits_{n\to\infty} g_n = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} g_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Niz $a_n = n^2 + (-1)^n n^2, \quad n \in \mathrm{N}$, ima jednu tačku nagomilavanja jer je $a_{2k+1} = 0$, za $k = 1, \ldots$ medjutim, zbog $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \infty$, dati niz ne konvergira. U ovom slučaju je $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

3.36. *Odrediti sve tačke nagomilavanja za niz čiji su članovi svi racionalni brojevi iz intervala* $[0, 1]$, *tj.*

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = 1/2, \quad f_4 = 1/3, \quad f_5 = 2/3, \quad f_6 = 1/4, \quad f_7 = 3/4,$$

$$f_8 = 1/5, \quad f_9 = 2/5, \quad f_{10} = 3/5, \quad f_{11} = 4/5, \quad f_{12} = 1/6, \quad \ldots.$$

Odrediti $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ *i* $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$.

$[0, 1]$ ima beskonačno mnogo racionalnih brojeva. Ako tačka $a \notin [0, 1]$, tada uvek postoji okolina tačke a takva da ne sadrži ni jedan elemenat datog niza.

Jasno je da je $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = 0$, a $\limsup\limits_{n\to\infty} g_n = 1$.

3.37. *Neka je dat niz* $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$, *takav da je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. *Pokazati da taj niz nema tačaka nagomilavanja.*

Rešenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji tačka a koja je tačka nagomilavanja niza. Tada postoji podniz $(a_{n_k})_{n\in\mathrm{N}}$ takav da je $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Zaista iz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ sledi da za svako $M > 0$ postoji n_0 takvo da za svako $n > n_0$ važi $a_n > M$. Kako je $n_k \geq n$ i $n_{k+1} > n_k$ to je $a_{n_k} > M$, za svako $n_k > n_0$, odakle je $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$.

3.38. *Odrediti* $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ *i* $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ *za sledeće nizove:*

a) $f_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1 + (-1)^n}{2} n$; b) $f_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + (-1)^{n(n+1)/2}$;

c) $f_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n + \sin \dfrac{\pi n}{4}$; d) $f_n = \cos^n \dfrac{2\pi n}{3}$.

Rešenja.

a) Iz $f_{2k} = \dfrac{(-1)^{2k}}{2k} + \dfrac{2}{2} 2k = \dfrac{1}{2k} + 2k$, sledi $\lim\limits_{k\to\infty} f_{2k} = +\infty$;

iz $f_{2k+1} = \dfrac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} + \dfrac{1 + (-1)^{2k+1}}{2}(2k+1)$, sledi $\lim\limits_{k\to\infty} f_{2k+1} = 0$.

Prema tome je $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n = +\infty$ i $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = 0$.

b) $$f_{4k} = 1 + 2(-1)^{4k+1} + (-1)^{4k(4k+1)/2} = 0, \qquad f_{4k+1} = 2,$$

$$f_{4k+2} = -2 = \liminf_{n\to\infty} f_n \quad \text{i} \quad f_{4k+3} = 4 = \limsup_{n\to\infty} f_n.$$

c) $\lim\limits_{k\to\infty} f_{8k} = \lim\limits_{k\to\infty} f_{8k+4} = e$; $\quad \lim\limits_{k\to\infty} f_{8k+2} = e + 1 = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n$;

$\lim\limits_{k\to\infty} f_{8k+6} = e - 1$;

$$\lim_{k\to\infty} f_{8k+1} = \lim_{k\to\infty} f_{8k+3} = -e + \frac{\sqrt{2}}{2};$$

d) $\limsup_{n\to\infty} f_n = 1;\quad \liminf_{n\to\infty} f_n = 0.$

3.39. *Dokazati da je potreban i dovoljan uslov da niz* $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *konvergira jednakost*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} f_n = \ell. \tag{3.5}$$

Rešenje. Tvrdjenje sledi direktno iz teoreme koja tvrdi da niz konvergira ako i samo ako je ograničen i ima tačno jednu tačku nagomilavanja.

3.40. *Ako je* $(f_{n_k})_{k\in\mathrm{N}}$ *podniz konvergentnog niza* $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$, *pokazati da je:*

$$\liminf_{n\to\infty} f_n \le \liminf_{k\to\infty} f_{n_k} \le \limsup_{k\to\infty} f_{n_k} \le \limsup_{n\to\infty} f_n.$$

Rešenje. Svaka tačka nagomilavanja podniza jeste tačka nagomilavanja niza, medjutim **ne mora** biti svaka tačka nagomilavanja niza i tačka nagomilavanja podniza.

3.41. *Neka su* $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *ograničeni i zadovoljavaju sledeće uslove:*

$$a_n \le b_n \quad za \quad n \ge n_0.$$

Pokazati da tada važi:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n \quad i \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Rešenje. Pokazaćemo samo prvu nejednakost. Označimo sa

$$a = \liminf_{n\to\infty} a_n \quad \text{i} \quad b = \liminf_{n\to\infty} b_n,$$

i pretpostavimo suprotno, tj. da je $a > b$. To znači da postoji realan broj $d > 0$ takav da je $d = a - b$.

Kako je a najmanja tačka nagomilavanja niza $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$, to postoji $n_1 \in \mathrm{N}$ takav da je

$$a_n > a - d/3 \quad \text{za svako} \quad n > n_1.$$

Kako je b najmanja tačka nagomilavanja niza $(b_n)_{n\in\mathrm{N}}$, to postoji beskonačno mnogo članova niza $n \in \mathrm{N}$ takvih da važi

$$b_n < b + d/3.$$

Znači, postoji beskonačno mnogo $n \in \mathrm{N}$, takvih da je

$$b_n < b + \frac{d}{3} < a - \frac{d}{3} < a_n, \qquad \text{što povlači} \qquad b_n < a_n,$$

a to je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $a_n \le b_n$, $n \in \mathrm{N}$, $n > n_0$.

3.42. *Dat je niz realnih brojeva* $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *sa:*

a) $x_n = (-1)^{n+1}\left(4 + \dfrac{2}{n}\right);$ b) $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+3}\cos\dfrac{n\pi}{2}.$

Odrediti $\inf\{x_n | \, n \in \mathrm{N}\}$, $\sup\{x_n | \, n \in \mathrm{N}\}$, $\liminf_{n\to\infty} x_n$ *i* $\limsup_{n\to\infty} x_n$.

Rezultati.

a) $\inf\{x_n | \, n \in \mathrm{N}\} = -5 < \liminf_{n\to\infty} x_n = -4 < \limsup_{n\to\infty} x_n = 4 < \sup\{x_n | \, n \in \mathrm{N}\} = 6.$

b) $\inf\{x_n | \, n \in \mathrm{N}\} = \liminf_{n\to\infty} x_n = 0 < \sup\{x_n | \, n \in \mathrm{N}\} = \limsup_{n\to\infty} x_n = 2.$

3.43. *Ako je* $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *niz realnih brojeva, pokazati da je:*

a) $\limsup_{n\to\infty} f_n = -\liminf_{n\to\infty}(-f_n);$ b) $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{1}{f_n} = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} f_n}.$

Rešenja.

a) Označimo sa

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = L, \quad L \in \mathrm{R}. \tag{3.6}$$

Tada za svako $\varepsilon > 0$, postoji

- beskonačno mnogo članova f_n takvih da je $f_n > L - \varepsilon$;
- najviše konačno mnogo članova f_n takvih da je $f_n > L + \varepsilon$. (3.7)

Iz relacije (3.7) sledi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji

- beskonačno mnogo članova $-f_n$ takvih da je $-f_n < -L + \varepsilon$;
- najviše konačno mnogo članova $-f_n$ takvih da je $-f_n < -L - \varepsilon$.

Kako su $-f_n$ članovi niza $(-f_n)_{n\in\mathrm{N}}$, to je

$$\liminf_{n\to\infty}(-f_n) = -L.$$

Primedba. Ako je $\limsup_{n\to\infty} f_n = +\infty$, tada je $\liminf_{n\to\infty}(-f_n) = -\infty$.

b) Neka je L iz relacije (3.6) i neka je $L > 0$. Iz (3.7), za svako $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < L$, postoji

- beskonačno mnogo članova $\dfrac{1}{f_n}$ takvih da $\dfrac{1}{f_n} < \dfrac{1}{L-\varepsilon} =: \dfrac{1}{L} + \varepsilon_1;$
- najviše konačno mnogo članova $1/f_n$ takvih da je $\dfrac{1}{f_n} < \dfrac{1}{L+\varepsilon} =: \dfrac{1}{L} - \varepsilon_2,$

gde je $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Kako su $1/f_n$ članovi niza $(1/f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to je

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \frac{1}{L} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} f_n}.$$

Ako je medjutim $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n = 0$, tada za svako $\varepsilon > 0$, postoji

- beskonačno mnogo članova f_n takvih da je $f_n < \varepsilon$
- najviše konačno mnogo članova f_n takvih da je $f_n > \varepsilon$.

Znači, za svako $\varepsilon > 0$ postoji

- beskonačno mnogo članova $\dfrac{1}{f_n}$ takvih da je $\dfrac{1}{f_n} > \dfrac{1}{\varepsilon}$,
- najviše konačno mnogo članova $\dfrac{1}{f_n}$ takvih da je $\dfrac{1}{f_n} < \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Tako imamo

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{f_n} = +\infty = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} f_n}.$$

3.44. *Ako su $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dva niza realnih brojeva, tada važi:*

$$\text{a)}\quad \liminf_{n\to\infty} f_n + \liminf_{n\to\infty} g_n \le \liminf_{n\to\infty}(f_n + g_n) \le \begin{cases} \liminf\limits_{n\to\infty} f_n + \limsup\limits_{n\to\infty} g_n \\ \\ \limsup\limits_{n\to\infty} f_n + \liminf\limits_{n\to\infty} g_n \end{cases}$$

$$\le \limsup_{n\to\infty}(f_n + g_n) \le \limsup_{n\to\infty} f_n + \limsup_{n\to\infty} g_n\,;$$

$$\text{b)}\quad \liminf_{n\to\infty} f_n \cdot \liminf_{n\to\infty} g_n \le \liminf_{n\to\infty}(f_n \cdot g_n) \le \begin{cases} \liminf\limits_{n\to\infty} f_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} g_n \\ \\ \limsup\limits_{n\to\infty} f_n \cdot \liminf\limits_{n\to\infty} g_n \end{cases}$$

$$\le \limsup_{n\to\infty}(f_n \cdot g_n) \le \limsup_{n\to\infty} f_n \cdot \limsup_{n\to\infty} g_n.$$

U b) smo pretpostavili da je $f_n > 0$ i $g_n > 0$, za sve $n \in \mathbb{N}$.

Rešenja.

a) Označimo sa

$$f = \liminf_{n\to\infty} f_n, \quad g = \liminf_{n\to\infty} g_n \quad \text{i} \quad \ell = \liminf_{n\to\infty}(f_n + g_n);$$

$$F = \limsup_{n\to\infty} f_n, \quad G = \limsup_{n\to\infty} g_n \quad \text{i} \quad L = \limsup_{n\to\infty}(f_n + g_n).$$

1. Pokazaćemo prvo da je $f + g \le \ell$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\ell < f + g$; tada važi $d := (f + g) - \ell > 0$. Za svako $\varepsilon > 0$, postoji

- najviše konačno mnogo članova $f_n < f - \varepsilon$;
- najviše konačno mnogo članova $g_n < g - \varepsilon$.

Znači, za svako $\varepsilon > 0$, postoji

- najviše konačno mnogo članova $\quad f_n + g_n < f + g - 2\varepsilon. \quad (3.8)$

Ovo važi za $\varepsilon := \dfrac{d}{3}$. Kako je ℓ tačka nagomilavanja niza $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to postoji konačno mnogo članova $f_n + g_n < \ell + \dfrac{d}{3}$, što je u suprotnosti sa relacijom (3.8).

2.Pokažimo da je $\ell \le f + G$. Za svako $\varepsilon > 0$ postoji

- beskonačno mnogo članova $f_n < f + \varepsilon$;
- beskonačno mnogo članova $g_n < G + \varepsilon$, ali samo konačno mnogo članova $g_n > G + \varepsilon$.

Za svako $\varepsilon > 0$ postoji

- beskonačno mnogo članova $\quad f_n + g_n < f + G + 2\varepsilon. \quad (3.9)$

Kako je ℓ najmanja tačka nagomilavanja niza $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to je $\ell \le f + G$.

3. Pokažimo da je $f + G \le L$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $L < f + G$. Tada je $(f + G) - L = d_2 > 0$. Za svako $\varepsilon > 0$ postoji

- beskonačno mnogo članova $f_n > f - \varepsilon$;
- beskonačno mnogo članova $g_n > G - \varepsilon$, ali samo konačno mnogo članova $g_n > G + \varepsilon$,

znači za svako $\varepsilon > 0$, postoji

- beskonačno mnogo članova $\quad f_n + g_n > f + G - 2\varepsilon. \quad (3.10)$

Kako je L najveća tačka nagomilavanja niza $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, postoji

- najviše konačno mnogo članova $f_n + g_n > L + \dfrac{d_2}{3}$, što je u suprotnosti sa relacijom (3.10) za $\varepsilon = \dfrac{d_2}{3}$.

4. Konačno, pokazaćemo da je $L \le F + G$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $L > F + G$. Tada važi $L - (F + G) = d_3 > 0$. Za svako $\varepsilon > 0$ postoji

- najviše konačno mnogo članova $f_n > F + \varepsilon$;
- najviše konačno mnogo članova $g_n > G + \varepsilon$.

Znači, za svako svako $\varepsilon > 0$ postoji

- najviše konačno mnogo članova $\quad f_n + g_n > F + G + 2\varepsilon. \quad (3.11)$

Kako je L tačka nagomilavanja niza $(f_n + g_n)_{n \in \mathrm{N}}$, to postoji

- beskonačno mnogo članova $f_n + g_n > L - \dfrac{d_3}{3}$,

što je u suprotnosti sa relacijom (3.11), za $\varepsilon = d_3/3$.

b) Pokazaćemo samo da je $f \cdot g \le \ell$, i koristiti sledeće oznake

$$f = \liminf_{n\to\infty} f_n \quad \text{i} \quad g = \liminf_{n\to\infty} g_n, \quad \ell = \liminf_{n\to\infty} (f_n \cdot g_n).$$

Ako je bar jedan od brojeva f ili g nula, tada je nejednakost $fg \le \ell$ trivialna. Pretpostavimo da je $f > 0$ i $g > 0$ i pretpostavimo da važi $\ell < f \cdot g$. Tada, za svako $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \min\{f, g\}/2$, postoji

- najviše konačno mnogo članova $f_n < f - \varepsilon$;
- najviše konačno mnogo članova $g_n < g - \varepsilon$.

Znači da, za svako $\varepsilon > 0$, postoji

- najviše konačno mnogo članova $f_n \cdot g_n < f \cdot g - \varepsilon(f + g - \varepsilon)$,

što je u suprotnosti sa činjenicom da je ℓ tačka nagomilavanja niza $(f_n g_n)_{n \in \mathrm{N}}$.

3.45. *Data su dva niza $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ i $(y_n)_{n\in\mathrm{N}}$ pri čemu prvi konvergira, tj. postoji realan broj x, takav da je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Pokazati da tada važi:*

a) $\liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$;

b) *ako je još $x_n > 0$ i $y_n > 0$ za sve $n \in \mathrm{N}$, tada je*

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \liminf_{n\to\infty} y_n.$$

Rešenja. a) Iz zadatka 3.44 imamo

$$\liminf_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n \le \liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \limsup_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$$

i iz konvergencije niza $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$, tj. $\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$ dobijamo traženu jednakost.

3.46. *Pokazati sledeće relacije:*

$$\inf\{x_n \mid n \in \mathrm{N}\} \le \liminf_{n\to\infty} x_n \le \limsup_{n\to\infty} x_n \le \sup\{x_n \mid n \in \mathrm{N}\}.$$

Rešenje. Pokazaćemo samo prvu relaciju. Kako je $i := \inf\{x_n \mid n \in \mathrm{N}\}$ najveće donje ograničenje poslednjeg skupa, to je $i \le x_n$ za svako $n \in \mathrm{N}$. Odatle je

$$i \le \lim_{n\to\infty}(\inf\{x_m \mid m \ge n\}) = \liminf_{n\to\infty} x_n.$$

3.47. *Neka niz $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ ima dve tačke nagomilavanja a i b i neka je $\liminf_{n\to\infty} f_n = -\infty$ i $\limsup_{n\to\infty} f_n = +\infty$. Pokazati da tada postoje monotono rastući podnizovi $(n_l)_{l\in\mathrm{N}}$, $(n_k)_{k\in\mathrm{N}}$, $(n_p)_{p\in\mathrm{N}}$ i $(n_q)_{q\in\mathrm{N}}$ skupa N takvi da je*

$$\lim_{l\to\infty} f_{n_l} = -\infty, \qquad \lim_{k\to\infty} f_{n_k} = a, \qquad \lim_{p\to\infty} f_{n_p} = b \qquad \lim_{q\to\infty} f_{n_q} = +\infty.$$

Rešenje. Posmatraćemo samo dva podniza niza $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ koji konvergiraju ka a i ka $+\infty$ respektivno. Neka je

$$M = \{n \in \mathrm{N} \mid f_n = a\}.$$

Ako je M beskonačan skup, tada se on može zapisati na jedinstven način kao rastući niz $(n_k)_{k\in\mathrm{N}}$ koji divergira ka $+\infty$. Ustvari, $(f_{n_k})_{k\in\mathrm{N}}$ je stacionarni podniz niza $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ koji konvergira ka a.

Ako je skup M konačan ili prazan, tada postoji $n_0 \in \mathrm{N}$ takvo da je

$$(\forall n \in \mathrm{N}) \quad n > n_0 \Rightarrow f_n \ne a.$$

Neka je $n_1 := n_0 + 1$ i $\varepsilon_1 := |f_{n_1} - a|/2$. Kako je a tačka nagomilavanja niza $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$, to postoji prirodan broj $n_2 > n_1$ takav da je

$$f_{n_2} \in (a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1).$$

Neka je $\varepsilon_2 := |f_{n_2} - a|/2$; tada postoji član niza f_{n_3} u intervalu $(a - \varepsilon_2, a + \varepsilon_2)$, itd. Nastavljajuću započetu proceduru dobijamo podniz $(f_{n_k})_{k\in\mathrm{N}}$ niza $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ koji konvergira ka a.

Neka je n_1 najmanji prirodan broj sa osobinom $f_{n_1} > 1$. Neka je, dalje n_2 najmanji prirodan veći od n_1 broj sa osobinom $f_{n_2} > n_1 + f_{n_1}$, pa neka je n_3 najmanji prirodan broj veći od n_2 sa osobinom $f_{n_3} > n_2 + f_{n_2}$, itd. Nastavljajući ovaj postupak dobijamo monoton niz $(n_q)_{q\in\mathrm{N}}$ koji divergira ka $+\infty$ pri čemu odgovarajući podniz takodje divergira ka $+\infty$.

3.5 Monotoni nizovi

Definicija 3.9. *Niz* $(a_n)_{n\in \mathbb{N}}$ *je*

- **monotono rastući** *(respektivno* **monotono neopadajući***) ako za svako* $n \in \mathbb{N}$ *važi* $a_n < a_{n+1}$ *(respektivno ako je* $a_n \le a_{n+1}$*);*
- **monotono opadajući** *(respektivno* **monotono nerastući***) ako za svako* $n \in \mathbb{N}$ *važi* $a_n > a_{n+1}$ *(respektivno ako je* $a_n \ge a_{n+1}$*).*

Niz je **monoton** *ako je ili monotono neopadajući ili monotono nerastući.*

Teorema 3.8. *Monotono neopadajući (respektivno nerastući) niz ograničen sa gornje (respektivno sa donje) strane je konvergentan.*

3.5.1 Zadaci

3.48. *Pokazati da je niz* $x_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!!}$*, konvergentan i odrediti njegovu granicu.*

Rešenje. Pokazaćemo da je količnik $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ manji od 1.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!(2n+1)!!}{(2n+3)!!n!} = \frac{n+1}{2n+3} < \frac{1}{2}.$$

Znači, niz monotono opada. Ograničen je odozdo sa 0. Iz teoreme 3.8 sledi da dati niz konvergira.

Označimo sa $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Tada zbog $x_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+3}\cdot x_n$ možemo pisati

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3}\cdot \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Odatle dobijamo da je $a = \dfrac{a}{2}$, što znači da je $a = 0$.

3.49. *Pokazati da je niz dat sa*

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \tag{3.12}$$

a) *monotono rastući;*

b) *ograničen odozgo sa brojem 3.*

Rešenja.

a) Posmatraćemo količnik $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ i pokazati da je manji od 1.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^n \cdot \frac{1}{\frac{n+2}{n+1}} = \frac{1}{\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n}\cdot\frac{n+1}{n+2}$$

Pomoću Bernulijeve nejednakosti $(1+h)^n \ge 1+nh$, $h > -1$, dobijamo

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \ge 1-\frac{n}{(n+1)^2}$$

$$\text{i}\quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \le \frac{1}{1-\frac{n}{(n+1)^2}}\cdot\frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3+3n^2+3n+2} < 1.$$

Može se pokazati da je i $a_{n+1} - a_n > 0$, kao u [] što takodje znači da niz monotono raste.

b) Na osnovu binomne formule je

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{n(n-1)}{2!\,n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{n!\,n^n}.$$

Iz nejednakosti

$$\frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{2},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!\cdot n^3} = \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) < \frac{1}{3!},$$

$\cdots\cdots$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{n!\cdot n^n} = \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < \frac{1}{n!},$$

dobijamo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} < 1+2 = 3.$$

Primetimo da pošto je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotono rastući, važi

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Primedba. Iz teoreme 3.8 sledi da dati niz konvergira. Granica ovog niza je iracionalan broj e.

3.50. *Pokazati da je:* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k, \quad k \in \mathbb{N},\ k \geq 2.$

Rešenje. Niz je ograničen sa gornje strane. Zaista iz nejednakosti (Bernulijeva)

$$1+\frac{k}{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^k,$$

sledi da je

$$\left(1+\frac{k}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{nk} < e^k.$$

(Jasno je da je $\left(1+\frac{k}{n}\right)^n > 0$.)

Niz je i monotono rastući. Korišćenjem Bernulijeve nejednakosti je

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1+\frac{k}{(n+1)}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^n} = \left(\frac{1+\frac{k}{(n+1)}}{1+\frac{k}{n}}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{k}{n}\right) \\
&= \left(\frac{n(n+k+1)}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+k}{n} = \left(1-\frac{k}{(n+1)(n+k)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+k}{n} \\
&> \left(1-\frac{\cancel{k}}{n+k}\right) \cdot \frac{n+k}{n} = 1.
\end{aligned}$$

Posmatrajmo podniz datog niza $x_{pk} = \left(\left(1+\frac{1}{p}\right)^p\right)^k$, za $n = pk,\ p \in \mathbb{N}$. Kako je $\lim\limits_{p\to\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^p = e$, to je i $\lim\limits_{p\to\infty} x_{pk} = \lim\limits_{p\to\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{kp} = e^k$. Prema tome je

$$\lim_{p\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k.$$

3.51. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{-n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{n^2+2}\right)^{n^2}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a\sqrt{n+1}-\log_a\sqrt{n}}{n}$, $a > 0$.

Rešenja.

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{-n} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{(n+3)}\right)^{-1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^3 = e^{-1}.$$

b) $$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{(-n)(-1)}} = e^2.
\end{aligned}$$

Poslednji zadatak se može uraditi i na sledeći način.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{2(n-1)/2} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{(n-1)/2}\right)^2 = e^2.
\end{aligned}$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{n^2+2}\right)^{n^2} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{2}{n^2}\right)^{n^2/2}}{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2/2}}\right)^2 = e^{-4}.$$

d) $$\lim_{n\to\infty} n\cdot(\log_a\sqrt{n+1}-\log_a\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\log_a\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{\log_a e}{2}.$$

3.52. *Pokazati sledeću procenu:*

$$0 < e - \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!} < \frac{1}{k\cdot k!}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

3.53. *Pokazati da realan broj* e *nije racionalan.*

Primedba. $e \approx 2.718281828459045$.

3.54. *Pokazati da je* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

Rešenje. Pomoću matematičke indukcije; pokažimo prvo da je

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

Za $n = 1$ nejednakost je tačna. Pretpostavimo da ona tačna i za $n = k$, tj. $k! > \left(\dfrac{k}{3}\right)^k$. Za $n = k+1$ imamo

$$(k+1)! = k!(k+1) > \left(\frac{k}{3}\right)^k (k+1) = \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1} \cdot \frac{3}{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k}. \tag{3.15}$$

U zadatku 3.49 je pokazano da je $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k < 3$, tako da iz relacije (3.15) sledi

$$(k+1)! > \left(\frac{k+1}{3}\right)^{k+1}.$$

Znači, za dato $\varepsilon > 0$ možemo odrediti n_0 takvo da važi

$$\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right| = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\dfrac{n}{3}\right)^n}} = \frac{3}{n} < \varepsilon,$$

za svako $n > n_0(\varepsilon) = [3/\varepsilon] + 1$.

3.55. *Posmatrajmo niz dat sa* $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$

a) *Pokazati da je niz monotono opadajući.*

b) *Odrediti* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

c) *Pokazati nejednakost* $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$.

d) *Pokazati sledeće jednakosti*

(i) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2;$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{kn}\right) = \ln k, \ k \in \mathbb{N}.$$

Rešenja.

a) Korišćenjem Bernulijeve nejednakosti imamo

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}$$

$$> \left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1.$$

Znači, $a_n > a_{n+1}$, pa je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotono opadajući.

b) Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je monotono opadajući i ograničen sa donje strane, (na primer nulom) tako da po teoremi 3.8 sledi da dati niz konvergira i njegova granica se može odrediti kao

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.$$

c) Iz a), b) i primera 3.49 sledi $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. Kako je logaritamska funkcija monotono rastuća, to važi

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

odakle je

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}.$$

Prema tome je $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$.

d) (i) Pomoću nejednakosti pokazane pod c), dobijamo sledeću nejednakost za $n > 1$.

$$\begin{array}{lclcl}
\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) & < & \dfrac{1}{n} & < & \ln\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right), \\[2ex]
\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) & < & \dfrac{1}{n+1} & < & \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right); \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\[2ex]
\ln\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right) & < & \dfrac{1}{2n} & < & \ln\left(\dfrac{2n}{2n-1}\right).
\end{array}$$

Sabirajući prethodne nejednakosti dobijamo

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) < \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} < \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right).$$

Pomoću transformacija

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln \prod_{k=n}^{2n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdots\frac{2n+1}{2n}\right),$$

dobijamo

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) < \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} < \ln\left(\frac{2n}{n-1}\right).$$

Logaritamska funkcija je neprekidna na intervalu $(0,+\infty)$, pa je

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{2n}{n-1}\right) = \ln 2.$$

Pomoću teoreme 3.4 konačno dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2.$$

Jednakost ii) se pokazuje analogno.

3.56. *Pokazati da je niz dat sa* $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ *monotono opadajući i ograničen odozdo.*

Rešenje. Iz primera 3.55 c) sledi da je

$$a_n - a_{n+1} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0,$$

što znači da je $a_n > a_{n+1}$, tj. niz $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ je monotono opadajući.

Niz je ograničen odozdo jer je

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n > \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln n \\ &= \ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n} > 0. \end{aligned}$$

Iz teoreme 3.8 sledi da niz $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ konvergira. Njegova granica $\lim_{n\to\infty} a_n =: c$, se zove **Ojlerova konstanta.**

3.57. *Neka je* p_n $n \in \mathrm{N}$, *proizvoljan niz realnih brojeva takav da je* $\lim_{n\to\infty} p_n = +\infty$ *i neka je* q_n, $n \in \mathrm{N}$, *takodje proizvoljan niz realnih brojeva takvih da je* $\lim_{n\to\infty} q_n = -\infty$. *Pokazati da je:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

Rešenje. Neka je $(n_k)_{k\in\mathrm{N}}$ niz celih brojeva takvih da je $\lim_{n\to\infty} n_k = \infty$. Niz $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ konvergira ka e što znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon)$ takvo da za svako $n > n_0(\varepsilon)$ važi

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon, \quad \Rightarrow \quad \left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} - e\right| < \varepsilon \qquad n_k > n_0(\varepsilon),$$

što znači da je $\lim_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e$.

Neka je dalje $(p_n)_{n\in\mathrm{N}}$ niz proizvoljnih realnih brojeva takvih da je $\lim_{n\to\infty} p_n = +\infty$. Tada postoji niz celih brojeva $(n_k)_{k\in\mathrm{N}}$, takvih da je $\lim_{n\to\infty} n_k = \infty$ i važi $n_k \le p_k < n_k + 1$, tj. $n_k = [p_k]$. Odatle je

$$\frac{1}{n_k+1} < \frac{1}{p_k} \le \frac{1}{n_k} \Rightarrow 1+\frac{1}{n_k+1} < 1+\frac{1}{p_k} \le 1+\frac{1}{n_k}.$$

Prema tome je

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{p_k} < \left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k} \le \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{p_k},$$

odakle je

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < \left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1},$$

tj.

$$\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{-1} < \left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k} < \left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right).$$

Prema tome je $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k} = e$.

Neka je dalje $(q_n)_{n\in\mathrm{N}}$, niz proizvoljnih realnih brojeva takvih da je $-q_n > 1$ i $\lim_{n\to\infty} q_n = -\infty$. Uvodjenjem smene $q_n = -\alpha_n$ dobijamo

$$\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = \left(1-\frac{1}{\alpha_n}\right)^{-\alpha_n} = \left(1+\frac{1}{\alpha_n-1}\right)^{\alpha_n-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\alpha_n-1}\right),$$

pa je $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e$.

3.58. *Pokazati da je* $\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = e$.

Rešenje. Neka je $1 < k < n$, $k \in \mathrm{N}$ Tada važi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}$$

$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$> 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Ako stavimo $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathrm{N}$ i $y_n = \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}$, $n \in \mathrm{N}$, tada iz prethodne relacije sledi $x_n \le y_n$, $n \in \mathrm{N}$. Prelaskom na graničnu vrednost dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)$$

$$= \left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = y_k,$$

za svako k, pa i za $k = n$. Znači, za sve $n \in \mathrm{N}$ je $y_n \le e$. Tako smo dobili nejednakost, odnosno $x_n \le y_n \le e$, odakle je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = e.$$

3.59. *Pokazati sledeće nejednakosti:*

a) $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$, $n \in \mathrm{N}$;

b) $\frac{r}{1+r} < \ln(1+r) < r$, $r \in \mathbf{Q}$, $r > -1$.

Rešenja.

a) Leva strana se pokazuje isto kao i nejedakost u relacijji (3.14) u zadatku 3.54. Za dokaz desne strane koristićemo mathematičku indukciju. Iz nejednakosti $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$ za $n > 1$, sledi $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Dalje je

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n = e\left(\frac{n}{2}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}{e\left(\frac{n}{2}\right)^n} = e\left(\frac{n}{2}\right)^n\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

b) Neka je $r = p/q$, $p, q \in \mathrm{N}$. Tada iz primera 3.55 c) imamo

$$\begin{aligned}\ln(1+r) &= \ln\left(1+\frac{p}{q}\right) = \ln\left(\frac{q+1}{q}\cdot\frac{q+2}{q+1}\cdots\frac{q+p}{q+p-1}\right)\\ &= \ln\left(1+\frac{1}{q}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{q+1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{q+p-1}\right)\\ &< \frac{1}{q}+\frac{1}{q+1}+\cdots+\frac{1}{q+p-1} < \frac{p}{q}.\end{aligned}$$

Tako je

$$\ln(1+r) < r. \tag{3.16}$$

Iz primera 3.55 c) sledi

$$\ln(1+r) > \frac{1}{q+1}+\frac{1}{q+2}+\cdots+\frac{1}{q+p} > \frac{p}{q+p} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}+1} = \frac{r}{r+1} \tag{3.17}$$

Za $-1 < r < 0$ i $r \in \mathbf{Q}$, možemo staviti $r = -r_1$, gde je $0 < r_1 < 1$. Označimo sa $r_2 = \frac{r_1}{1-r_1}$. Tada je $r_2 \in \mathbf{Q}$ i $r_2 > 0$. Iz relacija (3.16) i (3.17) dobijamo

$$\frac{r_2}{1+r_2} < \ln(1+r_2) < r_2.$$

Ako je $r_2 = \frac{r_1}{1-r_1}$, tada u poslednjoj relaciji imamo

$$r_1 < \ln\left(1+\frac{r_1}{1-r_1}\right) < \frac{r_1}{1-r_1}.$$

Prema tome je

$$\frac{r}{1+r} = \frac{-r_1}{1-r_1} < -\ln\left(1+\frac{r_1}{1-r_1}\right) = \ln(1-r_1) = \ln(1+r) < -r_1 = r\,,$$

što daje nejednakost u b).

3.60. *Pokazati konvergenciju sledećih nizova:*

a) $f_n = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \cdots \sqrt{c}}}} = \sqrt{c + f_{n-1}}, \quad f_1 = \sqrt{c}, \quad c > 0;$

b) $f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a + f_n^2\right), \quad f_1 = \frac{a}{2}, \quad 0 < a \leq 1;$

c) $f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{b}{f_n}\right), \quad f_1 \neq 0, \quad b \geq 0;$

d) $f_{n+1} = \frac{1}{m}\left((m-1)f_n + \frac{b}{f_n^{m-1}}\right), \quad f_1 \neq 0, \quad b > 0, \ m \in \mathrm{N}, \ n > 2;$

e) $f_{n+1} = f_n - \sin f_n, \quad 0 \leq f_1 < \pi.$

Rešenja.

a) Pomoću matematičke indukcije pokazaćemo da je dati niz monotono rastući i ograničen sa gornje strane.

Jasno je da važi $f_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}} > f_1$. Pod pretpostavkom da je $f_n > f_{n-1}$, imamo

$$\sqrt{c + f_n} > \sqrt{c + f_{n-1}} \Rightarrow f_{n+1} > f_n.$$

Pokažimo da za svako $n \in \mathrm{N}$ važi $f_n < \sqrt{c} + 1$. Očigledno je $f_1 = \sqrt{c} < \sqrt{c} + 1$. Ako je $f_n = \sqrt{c} < \sqrt{c} + 1$ za neko $n \in \mathrm{N}$, tada je

$$f_{n+1} = \sqrt{c + f_n} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{(\sqrt{c} + 1)^2} = \sqrt{c} + 1.$$

Znači, niz $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ monotono raste i ograničen je sa gornje strane, pa prema teoremi 3.8 on konvergira. Dakle postoji realan broj ℓ takav da važi

$$\lim_{n \to \infty} f_n = \ell \quad \text{i takodje} \quad \lim_{n \to \infty} f_{n-1} = \ell.$$

Granica datog niza ℓ se može odrediti iz

$$f_n^2 = c + f_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f_n^2 = c + \lim_{n \to \infty} f_{n-1} \Rightarrow \ell^2 = c + \ell,$$

tako da je $\ell_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4c}}{2}$. Kako su svi članovi datog niza pozitivni to broj $\ell_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4c}}{2} < 0$ ne može biti tražena granična vrednost.

Znači, $\ell = \ell_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$ je granična vrednost datog niza.

b) Niz $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ monotono raste. Kako je $f_n > 0$ za svako $n \in \mathrm{N}$, to je

$$f_2 = \frac{1}{2}\left(a + \left(\frac{a^2}{4}\right)\right) = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 > \frac{a}{2} = f_1.$$

Pod pretpostavkom da je $f_n > f_{n-1}$ ili $f_n - f_{n-1} > 0$, važi

$$2(f_{n+1} - f_n) = f_n^2 - f_{n-1}^2 = (f_n + f_{n-1})(f_n - f_{n-1}) > 0.$$

Niz $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$ je ograničen sa gornje strane. Zaista je $f_1 = \frac{a}{2} \leq \frac{1}{2} < 1$. Ako je $f_n < 1$, tada je

$$f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a + f_n^2\right) = \frac{a}{2} + \frac{f_n^2}{2} < 1.$$

Prema tome niz konvergira, pa postoji realan broj ℓ takav da važi

$$\lim_{n \to \infty} f_n = \ell = \lim_{n \to \infty} f_{n-1},$$

odnosno

$$\ell = \frac{1}{2}\left(a + \ell^2\right) \Rightarrow \ell_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4a}}{2}.$$

Dakle, tražena granična vrednost je $\ell = \ell_2 = 1 - \sqrt{1 - a}$.

Svi članovi datog niza su manji od 1 tako da broj $\ell_1 = 1 + \sqrt{1 - a} > 1$, (zbog $0 < a < 1$) ne može biti granična vrednost niza $(f_n)_{n \in \mathrm{N}}$.

c) U zavisnosti od b i f_1 posmatraćemo tri slučaja:

I Ako je $b = 0$, tada važi $f_n = \dfrac{f_1}{2^{n-1}}$ i $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = 0$.

II Ako je $b > 0$ i $f_1 > 0$, tada su svi f_n, $n \in \mathrm{N}$ pozitivni. Naime ako je $f_n > 0$, za neko $n \in \mathrm{N}$, tada je

$$f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{b}{f_n}\right) > 0.$$

Iz transformacije

$$2f_{n+1} = f_n + \frac{b}{f_n} \quad \Rightarrow \quad 2f_{n+1} - 2\sqrt{b} = f_n - 2\sqrt{b} + \frac{b}{f_n}$$

$$\Rightarrow \quad 2(f_{n+1} - \sqrt{b}) = \left(f_n - \sqrt{\frac{b}{f_n}}\right)^2 > 0,$$

zaključujemo da je $f_n > \sqrt{b}$ za $n > 1$. Iz poslednje nejednakosti imamo

$$f_{n+1} - f_n = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{f_n} - f_n\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b - f_n^2}{f_n} < 0,$$

odakle sledi da je dati niz monotono opadajući počevši od drugog člana.

Niz je konvergentan, pa postoji $\ell \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \ell = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Broj ℓ se može odrediti iz date rekurentne veze; tako dobijamo

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{b}{\ell}\right) > 0.$$

Kako je $f_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, konačno je $\ell = \sqrt{b}$.
III Ako je $b > 0$ i $f_1 < 0$, analogno se pokazuje da niz monotono raste i da važi $f_n < 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Znači, dati niz konvergira i granicna vrednost mu je $x = -\sqrt{b}$.

Primedba. U slučajevima II i III niz postaje monoton posle nekog indeksa n_0.

d) U zadatku 1.13 je pokazano da aritmetička sredina nije manja od geometrijske sredine konačno mnogo proizvoljnih pozitivnih brojeva. Tako je

$$f_{n+1} = \frac{(m-1)f_n + \dfrac{b}{f_n^{m-1}}}{m} \geq \sqrt[m]{f_n^{m-1} \cdot \frac{b}{f_n^{m-1}}} = \sqrt[m]{b}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je monotono opadajući jer je

$$f_{n+1} - f_n = \frac{1}{m}\left(\frac{b}{f_n^{m-1}} - f_n\right) = \frac{b - f_n^m}{m f_n^{m-1}} \leq 0.$$

Slično kao u c), pokazuje se da je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \sqrt[m]{b}$.

e) Niz je ograničen, tačnije važi $0 \leq f_n < \pi$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Za f_1 je to sigurno tačno. Pod pretpostavkom da je $0 \leq f_n < \pi$, imamo $0 \leq \sin(f_n) < f_n$, odakle je

$$0 \leq f_{n+1} = f_n - \sin(f_n) \leq f_n < \pi.$$

Iz poslednje relacije takodje sledi da je dati niz monotono opadajući, pa on konvrgira. Funkcija $g(x) = \sin x$ je neprekidna na $\mathbb{R}$, pa se granica može odrediti iz jednakosi

$$\ell = \ell - \sin \ell, \tag{3.18}$$

što sledi iz

$$\lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \ell = \lim_{n\to\infty} \sin(f_n) = \sin \ell.$$

Jednačina (3.18) ima dva rešenja na intervalu $[0,\pi]$, $\ell_1 = 0$ i $\ell_2 = \pi$. Iz nejednakost $f_n \leq f_1 < \pi$ sledi da je tražena granična vrednost $\ell = \ell_1 = 0$.

3.61. *Pokazati konvergenciju i odrediti granične vrednosti sledećih nizova:*

a) $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $a_1 > 0$; b) $b_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2b_n + \dfrac{125}{b_n^2}\right)$, $b_1 \neq 0$.

Rezultati. a) 2. b) 5.

3.6 Razni zadaci

3.62. *Za niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ označimo sa*

$$F_n := \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.19}$$

niz njegovih aritmetičkih sredina. Dokazati sledeću implikaciju:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} F_n = f.$$

Rešenje. Iz uslova $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, sledi da je

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\quad n > n_0 \ \Rightarrow\ |f_n - f| < \varepsilon/2.$$

Tada možemo pisati

$$\begin{aligned}
|F_n - f| &= \left|\frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_{n_0} + \cdots + f_n}{n} - f\right| \\
&\leq \frac{1}{n}(|f_1 - f| + \cdots + |f_{n_0-1} - f| + |f_{n_0} - f| + \cdots + |f_n - f|) \\
&< \frac{A}{n} + \frac{n - n_0}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

gde je $A = |f_1 - f| + |f_2 - f| + \cdots + |f_{n_0} - f|$. Postoji prirodan broj $n_1 = n_1(\varepsilon)$ takav da je

$$n > n_1 \ \Rightarrow\ \frac{A}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Neka je $n_2 = n_2(\varepsilon) := \max\{n_0, n_1\}$. Tada dobijamo

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_2 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\quad n > n_2 \ \Rightarrow\ |F_n - f| < \varepsilon.$$

Primedba. Suprotno tvrdjenje ne mora uvek biti tačno. Na primer, niz $f_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$, ne konvergira, ali je $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = 0$, ako je $F_n, n \in \mathbb{N}$, dato sa 3.19.

3.63. *Neka je $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz pozitivnih brojeva i označimo sa*

$$G_n := \sqrt[n]{g_1 g_2 \cdots g_n} \tag{3.20}$$

niz njegovih geometrijskih sredina. Pokazati sledeću implikaciju:

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} G_n = g,$$

pod pretpostavkom da je $g > 0$.

Rešenje. Logaritamska funkcija je neprekidna, tako da iz
$$\lim_{n\to\infty} g_n = g \quad \text{sledi} \quad \lim_{n\to\infty} \ln g_n = \ln \lim_{n\to\infty} g_n = \ln g.$$
Kako je
$$\ln G_n = \frac{1}{n}(\ln g_1 + \ln g_2 + \cdots + \ln g_n),$$
to možemo primeniti zadatak 3.62 i dobiti
$$\lim_{n\to\infty} \ln G_n = \ln g, \quad \text{pa je konačno} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{g_1 \cdots g_n} = g.$$
Primedba. Suprotno ne mora da važi.

3.64. *Pokazati da ako niz* $(g_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *ima osobinu*
$$\lim_{n\to\infty} (g_n - g_{n-1}) = g, \quad \textit{tada je} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{g_n}{n} = g.$$
Rešenje. Označimo sa $f_n = g_n - g_{n-1}$, $g_0 := 0$. Tada je
$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} (g_n - g_{n-1}) = g.$$
Niz aritmetičkih sredina niza $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ je
$$F_n = \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}{n} = \frac{g_1 - g_0 + g_2 - g_1 + g_3 - g_2 + \cdots + g_n - g_{n-1}}{n} = \frac{g_n}{n}.$$
Iz zadatka 3.62 sledi da je
$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_n}{n} = \lim_{n\to\infty} F_n = g.$$

3.65. *Neka niz* $(h_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *pozitivnih brojeva ima osobinu* $(h_n)_{n\in\mathrm{N}}$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{h_{n-1}} = h, \quad \textit{tada je} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{h_n} = h.$$

Rešenje. Označimo sa $g_n = \dfrac{h_n}{h_{n-1}}$, $h_0 := 1$. Tada iz jednakosti
$$G_n = \sqrt[n]{g_1 \cdots g_n} = \sqrt[n]{\frac{h_1}{h_0} \cdots \frac{h_n}{h_{n-1}}} = \sqrt[n]{h_n}$$
sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{h_n} = h$.

3.66. *Odrediti granične vrednosti sledećih nizova:*

a) $f_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$; b) $g_n = \dfrac{\sqrt[n]{(kn)!}}{n^k}$, $k \in N$;

c) $h_n = \dfrac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}$.

Rešenja.

a) Ako označimo sa $x_n := \dfrac{n!}{n^n}$, tada je
$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\dfrac{n!}{n^n}}{\dfrac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}}} = \frac{n(n-1)^{n-1}}{n^n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}}.$$
Sada je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \dfrac{1}{e}$; pa iz zadatka 3.62 sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$.

b) Za $y_n = \dfrac{(kn)!}{n^{kn}}$ dobijamo
$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{\dfrac{(kn)!}{n^{kn}}}{\dfrac{(k(n-1))!}{(n-1)^{k(n-1)}}} = \frac{(n-1)^{kn}}{n^{kn}} \cdot \frac{kn \cdot (kn-1) \cdots (k(n-1)+1)}{(n-1)^k}$$
$$= \frac{1}{\left(\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right)^k} \cdot \frac{kn \cdot (kn-1) \cdots (k(n-1)+1)}{n^k}.$$
Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n}{y_{n-1}} = \dfrac{k^k}{e^k}$ i konačno $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{(kn)!}}{n^k} = \dfrac{k^k}{e^k}$, $k \in \mathrm{N}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 4/e$.

3.67. *Niz* $(F_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *je niz aritmetičkih sredina sredina niza* $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$. *Pokazati da važi:*
$$\liminf_{n\to\infty} f_n \le \liminf_{n\to\infty} F_n \le \limsup_{n\to\infty} F_n \le \limsup_{n\to\infty} f_n.$$

Rešenje. Pokazaćemo samo nejednakost $\limsup\limits_{n\to\infty} F_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} f_n$. Označimo sa $f = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ i pretpostavimo da je $f \ge 0$. Tada za svako $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takvo da za svako $n > n_0$ važi $f_n < f + \varepsilon$. Tako za $n \ge n_0$ imamo
$$F_n = \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_{n_0} + \cdots + f_n}{n}$$
$$< \frac{f_1 + f_2 + \cdots + f_{n_0}}{n} + \frac{(n - n_0)(f + \varepsilon)}{n} \le \frac{B}{n} + f + \varepsilon,$$

gde možemo pisati $B := f_1 + f_2 + \cdots + f_{n_0}$. Za dato $\varepsilon_1 > 0$ postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takvo da je $\dfrac{|B|}{n} < \varepsilon_1$ za svako $n > n_1$. Neka je dato $\varepsilon_2 > 0$. Izaberimo $\varepsilon := \varepsilon_2/2$ i $\varepsilon_1 := \varepsilon_2/2$ i označimo sa $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$. Tada važi

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_2 \;\Rightarrow\; F_n < f + \varepsilon_2,$$

a to znači da je $\limsup\limits_{n\to\infty} F_n \le f$.

Slučaj $f < 0$ se pokazuje analogno.

3.68. *Pretpostavimo da je* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz pozitivnih brojeva takvih da je* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} p_k = +\infty$, *i neka je* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz realnih brojeva. Niz*

$$F_n := \frac{p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n}{p_1 + p_1 + \cdots + p_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

se zove niz uopštenih aritmetičkih sredina *niza* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Pokazati sledeće:*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} F_n \le \limsup_{n\to\infty} F_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Znači, da ako niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira, tada niz njegovih uopštenih aritmetičkih sredina konvregira ka istoj granici.

3.69. Štolcova teorema.
Neka nizovi pozitivnih brojeva $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zadovoljavaju sledeće uslove:*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = +\infty$ *i* $P_{n+1} > P_n$;

ii) *postoji* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}}$,

Tada postoji $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Q_n}{P_n}$ *i važi* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Q_n}{P_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}}$.

Rešenje. Na osnovu uslova za niz P_n, možemo konstruisati sledeća dva niza:

$$P_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n \quad \text{i} \quad Q_n = p_1a_1 + p_2a_2 + \cdots + p_na_n.$$

Tada je $\dfrac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}} = \dfrac{p_na_n}{p_n} = a_n$. To znači da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$, tada iz prethodnog zadatka sledi da niz uopštenih aritmetičkih sredina ima istu granicu tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Q_n}{P_n} = \ell$.

3.70. *Pokazati da tvrdjenje suprotno Štolcovoj teoremi ne mora uvek biti tačno. Znači, ako postoji* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Q_n}{P_n} = \ell$, *tada* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}}$ *ne mora da postoji.*

Rešenje. Uzmimo, na primer $P_n = n$ i $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\dfrac{k\pi}{3}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{P_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{3}}{n} = 0.$$

Granična vrednost $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}}$ ne postoji jer je

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}} = \liminf_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}} = \limsup_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3.71. *Odrediti sledeće granične vrednosti korišćenjem Štolcove teoreme:*

a) $f_n = \dfrac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$; b) $g_n = \dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n}$;

c) $h_n = \dfrac{1^p + 3^p + \cdots + (2n+1)^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{Q}$; d) $x_n = \dfrac{\ln n}{n^{1/k}}$, $k \in \mathbb{N}$;

e) $y_n = \dfrac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k} - \dfrac{n}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Rešenja.

a) Označimo sa $Q_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ i $P_n = n^{k+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada iz nejednakosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - n^{k+1} + (k+1)n^k - \cdots - (-1)^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Q_n}{P_n} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \dfrac{1}{k+1}$.

b) Ako je $Q_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ i $P_n = n$, $n \in \mathrm{N}$, tada imamo

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{P_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1} = 0.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \frac{2^p}{p+1}$.

d) Za $Q_n = \ln n$ i $P_n = n^{1/k}$, $n \in \mathrm{N}$, imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n - \ln(n-1)}{n^{1/k} - (n-1)^{1/k}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}{n^{1/k}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/k}\right)} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n^{1/k}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/k}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n^{(1/k)-1}} \sum_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j/k} = 0.$$

Iz teoreme 3.4 sledi da $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}}$ postoji i da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{P_n} = 0.$$

e) Označimo sa $Q_n = (k+1)(1^k + 2^k + \cdots + n^k) - n^{k+1}$ i $P_n = (k+1)n^k$, $n \in \mathrm{N}$. Tada imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q_n}{P_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)(1^k + 2^k + \cdots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1)n^k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{Q_n - Q_{n-1}}{P_n - P_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)n^k - (n^{k+1} - (n-1)^{k+1})}{(k+1)(n^k - (n-1)^k)} = \frac{1}{2}.$$

3.72. *Neka su data dva niza* $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *i neka je niz* $(c_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *određen sa*

$$c_n = \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

a) *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *i* $|b_n| \leq B$ *za svako* $n \in \mathrm{N}$, *tada važi* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

b) *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *tada je* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \cdot b$.

Pokazati.

Rešenja.

a) Iz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, i Štolcove teoreme, sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Kako je niz $(b_n)_{n\in\mathrm{N}}$ ograničen, tj. $|b_n| \leq B$ za svako $n \in \mathrm{N}$, imamo

$$|c_n| \leq \frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|}{n} B \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} |c_n| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{B}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k| = 0.$$

Znači, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

b) Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $x_n = a_n - a$ za svako $n \in \mathrm{N}$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ i

$$c_n = \frac{(x_1 + a)b_n + \cdots + (x_n + a)b_1}{n}$$

$$= \frac{x_1 b_n + \cdots + x_n b_1}{n} + a \cdot \frac{b_n + \cdots + b_1}{n} = f_n + g_n;$$

Iz a) sledi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 b_n + \cdots + x_n b_1}{n} = 0$, ; dok je $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \lim\limits_{n\to\infty} a \cdot \frac{b_n + \cdots + b_1}{n} = a \cdot b$.

Prema tome je $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \cdot b$.

3.7 Asimptotsko ponašanje

Definicija 3.10. *Niz* $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *se* **asimptotski ponaša** *kao niz* $(g_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *kada n teži ka* ∞ *ako je* $g_n \neq 0$ *za svako* $n \in \mathrm{N}$ *i važi* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n}{g_n} = 1$. *To pišemo* $f_n \sim g_n$ *kada* $n \to \infty$.

Definicija 3.11. *Neka je* $(g_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *niz sa pozitivnim članovima. Tada da je*

- *niz* $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ **"veliko o"** *niza* $(g_n)_{n\in\mathrm{N}}$ *kada* $n \to \infty$ *ako postoji* $n_0 \in \mathrm{N}$ *i konstanta* $K > 0$ *takva da je*

  $$|f_n| \leq K \cdot g_n, \quad \text{za svako } n > n_0,$$

  što pišemo $f_n = O(g_n)$ *kada* $n \to \infty$;

- *niz* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ "malo o" *niza* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *kada* $n\to\infty$ *ako je*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{g_n}=0,$$
što pišemo $f_n=o(g_n)$ *kada* $n\to\infty$.

Posebno ako nizovi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiraju ka $+\infty$ i zadovoljavaju uslov
$$f_n=o(g_n)\ \text{kada}\ n\to\infty \iff \lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{g_n}=0,$$
kažemo da niz $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergira brže ka beskonačnosti nego niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i pišemo
$$f_n\prec g_n,\ \text{kada}\ n\to\infty.$$

3.7.1 Zadaci

3.73. *Neka su dati sledeći nizovi* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sa*

a) $f_n=n^4+3n^2+2$ *i* $g_n=n^4$;   b) $f_n=\sqrt[n]{n!}$ *i* $g_n=\dfrac{n}{e}$;

c) $f_n=\ln n!$ *i* $g_n=n\ln n$.

Pokazati da se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *asimptotski ponaša kao* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *u oznaci* $f_n\sim g_n$ *kada* $n\to\infty$.

Rešenja. Po definiciji 3.10 možemo pisati
$$f_n\sim g_n\ \text{kada}\ n\to\infty \iff \lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{g_n}=1.$$

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+3n^2+2}{n^4}=1.$

b) Pomoću **Stirlingove formule**
$$n!=n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}\cdot e^{\theta/(12n)},\quad 0<\theta<1,$$
odnosno iz
$$n!\sim n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}\quad\text{kada}\ n\to\infty. \tag{3.21}$$
dobijamo
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{\frac{n}{e}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}\,e^{\theta/(12n)}}}{\frac{n}{e}}=1.$$

c) Pomoću Stirlingove formule dobijamo
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{n\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n-n+\frac{1}{2}\ln(2\pi n)+\frac{\theta}{12n}}{n\ln n}=1.$$

3.74. *Pokazati sledeće asimptotske relacije:*

a) $n^a\prec n^b$ *za* $0<a<b$;   b) $p^n\prec q^n$ *za* $0<p<q$;

c) $n^a\prec q^n$ *za* $a>0,\ q>1$;   d) $q^n\prec n!$ *zahaq* >1;

e) $\ln n\prec n^a$ *za* $a>0$;   f) $n!\prec n^n$.

Rešenja.

e) Postoji $q\in\mathbb{N}$, takvo da je $a>1/q$. Tada je $\dfrac{\ln n}{n^a}<\dfrac{\ln n}{n^{1/q}}$. Iz relacija
$$\frac{\ln(n+1)-\ln n}{(n+1)^{1/q}-n^{1/q}}=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n((n+1)^{1/q}-n^{1/q})}\le\frac{q(n+1)^{(q-1)/q}}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$
sledi
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{(n+1)^{1/q}-n^{1/q}}=0.$$
Poslednja nejednakost se dobija iz sledećeg identiteta
$$1=(\sqrt[q]{n+1}-\sqrt[q]{n})\left(\sqrt[q]{(n+1)^{q-1}}+\sqrt[q]{(n+1)^{q-2}n}+\cdots+\sqrt[q]{n^{q-1}}\right),$$
što daje
$$\sqrt[q]{n+1}-\sqrt[q]{n}\ge\frac{1}{q\sqrt[q]{(n+1)^{q-1}}}.$$

Iz Štolcove teoreme sledi
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{1/q}}=0,\quad\text{a to povlači}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^a}=0.$$

Primedba. Na osnovu ovog zadatka možemo formirati (parcijalnu) skalu rasta za nizove koji divergiraju ka beskonačnosti
$$\ln n\prec n^a\prec n^b\prec q^n\prec n!\prec n^n,\quad 0<a<b,\quad q>1.$$

3.75. *Ako je dat niz* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tako da je* $f_n>1$ *i* $\lim_{n\to\infty} f_n=+\infty$, *tada*

Rešenje. Kako je $[f_n] \leq f_n < [f_n] + 1$ i $q^{f_n} \geq q^{[f_n]}$, to je

$$\frac{f_n}{q^{f_n}} < \frac{[f_n]+1}{q^{[f_n]}} = \frac{n_k+1}{q^{n_k}}.$$

Niz dat sa $\frac{n_k+1}{q^{n_k}}$ je podniz niza $\frac{n+1}{q^n}$. Iz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{q^n} = 0$ sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n_k+1}{q^{n_k}} = 0$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^{f_n}}{f_n} = 0$. Na osnovu ovog zadatka možemo formirati sledeću skalu rasta nizova koji divergiraju ka beskonačnosti:

$$n^a \prec q^{n^a} \prec q^{q^{n^a}} \prec \ldots, \quad a > 0,\ q > 1.$$

3.76. *Ako je $q > 1$ i $a_n \succ b_n, n \in \mathrm{N}$, pokazati da je $q^{a_n} \succ q^{b_n}$.*

Rešenje. Na osnovu jednakosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^{a_n}}{q^{b_n}} = \lim_{n\to\infty} q^{a_n-b_n} = \lim_{n\to\infty} q^{a_n(1-b_n/a_n)} = +\infty,$$

i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, dobijamo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^{b_n}}{q^{a_n}} = 0$. Prema tome možemo formirati i sledeću skalu rasta nizova koji konvergiraju ka beskonačnosti.

$$q^{\sqrt{n}} \prec q^n \prec q^{n^2} \prec \ldots, \quad q > 1.$$

3.77. *Ako je dat niz $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ tako da je $f_n > 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = +\infty$, pokazati da je tada $\ln f_n \prec f_n$.*

Rešenje. $\frac{\ln f_n}{f_n} < \frac{\ln([f_n]+1)}{[f_n]} = \frac{\ln(n_k+1)}{n_k}$. Niz $\frac{\ln(n_k+1)}{n_k}$ je podniz niza $\frac{\ln(n+1)}{n}$. Dalje je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = 0, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln f_n}{f_n} = 0.$$

3.78. *Ako nizovi $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ i $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ zadovoljavaju $f_n > 0$, $g_n > 0$, pokazati da je:*

a) $O(1) + O(1) = O(1)$;

b) $o(1) + o(1) = o(1)$;

c) $o(1) = O(1)$;

d) $O(f_n) + O(g_n) = O(f_n + g_n)$;

e) $o(f_n) + o(g_n) = o(f_n + g_n)$,

gde $f_n = O(1)$ znači da je niz $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ ograničen, a $f_n = o(1)$ znači da niz $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ teži nuli. Kao i obično, pišemo $(f_n+g_n)_{n\in\mathrm{N}} = (f_n)_{n\in\mathrm{N}} + (g_n)_{n\in\mathrm{N}}$.

Primedba. Relacije a) - e) se čitaju sa leva na desno.

Rešenja.

a) Zbir dva ograničena niza je ograničen niz.

b) Zbir dva niza koji konvergiraju ka nuli je niz koji konvergira ka nuli.

c) Konvergentan niz je ograničen.

d) Iz definicije 3.11 imamo

$$f_n = O(g_n) \iff ((\exists M > 0)\,(\exists n_0 \in \mathrm{N})\,(n > n_0)\ \ |f_n| \leq M g_n).$$

Relacije $\Psi_n = O(f_n)$, $U_n = O(g_n)$ znače $|\Psi_n| \leq K f_n$, $|U_n| \leq M g_n$, za neko $K > 0$, $M > 0$ i $n > n_0$, za neko $n_0 \in \mathrm{N}$. Tako je za $n > n_0$

$$|\Psi_n + U_n| \leq K f_n + M g_n \leq L(f_n + g_n),$$

gde je $L = \max\{K, M\}$. To znači da je $\Psi_n + U_n = O(f_n + g_n)$.

e) Izrazi $a_n = o(f_n)$, $b_n = o(g_n)$ označavaju $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{f_n} = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{g_n} = 0$. Tada je $\left|\frac{a_n}{f_n+g_n}\right| \leq \left|\frac{a_n}{f_n}\right|$ i $\left|\frac{b_n}{f_n+g_n}\right| \leq \left|\frac{b_n}{g_n}\right|$.

Odatle je $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+b_n}{f_n+g_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{f_n+g_n} + \frac{b_n}{f_n+g_n}\right) = 0,$$
što znači da je $o(f_n) + o(g_n) = o(f_n + g_n)$.

3.79. *Ako nizovi $(f_n)_{n\in\mathrm{N}}$ i $(g_n)_{n\in\mathrm{N}}$ zadovoljavaju uslove $f_n > 0$ i $g_n > 0$, $n \in \mathrm{N}$, pokazati da je:*

a) $O(f_n) + o(g_n) = O(f_n + g_n)$;

b) $O(f_n) \cdot O(g_n) = O(f_n \cdot g_n)$;

c) $O(f_n) \cdot o(g_n) = o(f_n \cdot g_n)$;

d) $o(f_n) \cdot o(g_n) = o(f_n \cdot g_n)$.

3.80. *Ako je $f_n \sim g_n$, $n \to \infty$, tada važi $f_n - g_n = o(g_n)$. Pokazati.*

Rešenje. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n}{g_n} = 1$, znači da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takvo da važi

$$\left|\frac{f_n}{g_n} - 1\right| < \varepsilon, \quad \text{za svako } n > n_0.$$

Prema tome je

$$-\varepsilon < \frac{f_n - g_n}{g_n} < \varepsilon, \quad \text{što znači} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f_n - g_n}{g_n} = 0, \quad \text{pa je} \quad f_n - g_n = o(g_n).$$

3.81. *Pokazati da je* $f_n \sim g_n$ *kada* $n \to \infty$, *ako su nizovi* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dati sa*

a) $f_n = \dfrac{2n^3+3n^2+n+1}{3n^2+1}, \quad g_n = \dfrac{2}{3}n;$

b) $f_n = 1+2+3+\cdots+n, \quad g_n = n^2/2;$

c) $f_n = \sqrt[3]{n^4}+n+2, \quad g_n = n\sqrt[3]{n};$

d) $f_n = 1^p+3^p+\cdots+(2n+1)^p, \quad g_n = \dfrac{2^p n^{p+1}}{p+1}, \quad p \in \mathbb{Q}$

3.82.

a) *Da li postoji niz koji "najbrže" raste, tj. da li postoji niz* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *takav da je* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n}{g_n} = 0$, *a svako* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

b) *Da li postoji niz koji "najsporije" raste,*

c) *Ako za dva niza* f_n *i* g_n *važi* $f_n \prec g_n$ *kada* $n \to \infty$, *pokazati da tada postoji niz* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *takav da je* $f_n \prec c_n \prec g_n$ *kada* $n \to \infty$.

Rezultati.

a) Ne, jer je uvek $f_n \prec e^{f_n}$.

b) Ne, jer je $\ln f_n \prec f_n$.

c) Ako su data dva niza sa pozitivnim članovima tada, na primer, možemo uzeti

$c_n = \sqrt{f_n g_n}$.

Glava 4

Granična vrednost funkcije

4.1 Granica

Definicija 4.1. *Neka je* x_0 *tačka nagomilavanja domena* $A \subset \mathbb{R}$ *funkcije* $f : A \to \mathbb{R}$. *Broj* L *je* **granična vrednost funkcije** f **kada** x **teži** x_0 *ako za svako* $\varepsilon > 0$, *postoji* $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, *takvo da za svako* $x \in A$ *sa osobinom da za* $0 < |x - x_0| < \delta$ *važi* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Tada pišemo $f(x) \to L$ kada $x \to x_0$, $x \in A$, ili $\lim\limits_{x\to x_0,\, x\in A} f(x) = L$.

Primetimo da za definiciju granične vrednosti funkcije u tački x_0 nije potrebno pretpostaviti definisanost funkcije u toj tački. Čak i ako $x_0 \in A$, vrednost funkcije f u tački x_0 nije bitna sa gledišta definicije 4.1.

Pomoću logičkih simbola, definicija 4.1 se može izraziti i na sledeći način

$$\lim_{x\to x_0,\, x\in A} f(x) = L$$

$$\iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A) \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definicija 4.1 je ekvivalentna sa sledećom definicijom.

Definicija 4.2. [Hajne] *Neka je* x_0 *tačka nagomilavanja domena* A *funkcije* $f : A \to \mathbb{R}$. *Tada je broj* L **granična vrednost funkcije** f **kada** x **teži** x_0 *ako za svaki niz* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *iz* $A \setminus \{x_0\}$ *koji konvergira ka* x_0 *važi*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Ako u definiciji 4.1 uzmemo samo vrednosti $x \in A$ koje su veće (resp. manje) od x_0, dobijamo definiciju **desne granične vrednosti** (resp. **leve granične vrednosti**) funkcije $f : A \to \mathbb{R}$ u tački x_0. Desna (resp. leva) granična vrednost f u tački x_0 označava se sa

$$\lim_{x\to x_0+,\, x\in A} f(x) \quad (\text{resp.} \quad \lim_{x\to x_0-,\, x\in A} f(x)).$$

Teorema 4.1. *Neka je x_0 tačka nagomilavanja domena funkcije $f : A \to \mathbb{R}$. Ako i leva i desna granična vrednost funkcije u tački x_0 postoje, tada je potreban i dovoljan uslov za postojanje granične vrednosti funkcije f u tački x_0 jednakost*

$$\lim_{x\to x_0-,\, x\in A} f(x) = \lim_{x\to x_0+,\, x\in A} f(x) =: L. \tag{4.1}$$

U stvari, relacija (4.1) je ekvivalentna sa $\lim\limits_{x\to x_0,\, x\in A} f(x) = L$.

Ako domen A funkcije f sadrži okolinu (interval) oko tačke x_0 (ali ne obavezno i tačku x_0), odnosno u slučaju desne (resp. leve) granične vrednosti intervale oblika (x_0, b) (resp. (a, x_0)), tada radi jednostavnosti pišemo

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad \lim_{x\to x_0+} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_0-} f(x)$$

za graničnu vrednost, desnu i levu graničnu vrednost funkctije f u tački x_0.

Definicija 4.3.

- *Neka domen A funkcije $f : A \to \mathbb{R}$ sadrži interval $(a, +\infty)$ za neko $a \in \mathbb{R}$. Broj L je* **granična vrednost funkcije f u $+\infty$** *ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $T > a$, $T = T(\varepsilon)$, takav da za svako $x > T$ važi $| f(x) - L | < \varepsilon$. Tada pišemo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.*
- *Neka domen A funkcije $f : A \to \mathbb{R}$ sadrži interval $(-\infty, b)$ za neko $b \in \mathbb{R}$. Broj L je* **granična vrednost funkcije f u $-\infty$** *ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $T < b$, $T = T(\varepsilon)$, takav da za svako $x < T$ važi $| f(x) - L | < \varepsilon$. Tada pišemo $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.*

U definiciji 4.3 x teži u prvom slučaju ka *plus beskonačnosti* preko rastućih pozitivnih brojeva, dok u drugom slučaju x teži ka *minus beskonačnosti* preko opadajućih negativnih brojeva.

Definicija 4.4. *Neka domen A funkcije f sadrži interval (x_0, b) i neka za svako $T > 0$, postoji $\delta > 0$, $\delta = \delta(T)$, takvo da za svako $x \in A$ i $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ važi $f(x) > T$. Tada kažemo da funkcija f* **teži ka plus beskonačnosti** *kada $x \to x_0+$, i pišemo*

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = +\infty. \tag{4.2}$$

Analogno značenje imaju sledeće oznake:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = -\infty.$$

Teorema 4.2. *Neka su funkcije f i g definisane na skupu $A \subset \mathbb{R}$ i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa A. Pretpostavimo da postoje sledeće granične vrednosti: $\lim\limits_{x\to x_0,\, x\in A} f(x) = L$ i $\lim\limits_{x\to x_0,\, x\in A} g(x) = K$. Tada važi*

- $\lim\limits_{x\to x_0,\, x\in A} (f(x) \pm g(x)) = L \pm K$;
- $\lim\limits_{x\to x_0,\, x\in A} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot K$;
- $\lim\limits_{x\to x_0,\, x\in A} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}$,

  gde smo dodatno pretpostavili da postoji $\delta > 0$ takvo da je $g(x) \neq 0$, za sve x u skupu $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap A$ i $K \neq 0$;
- $(\exists\delta > 0)\,(\forall x \in A) \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq g(x)) \quad \Rightarrow \quad L \leq K.$

Zadnje jednakosti i nejednakosti postoje i ako se tačka x_0 zameni sa jednim od simbola $+\infty$ ili $-\infty$.

4.1.1 Zadaci

4.1. *Pomoću definicija 4.1 i 4.2 pokazati* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = 2$.

Rešenja. Prvo ćemo koristiti definiciju 4.1. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ i $x \in (2, 4)$, $x \neq 3$, možemo pisati

$$\left|\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} - 2\right| = \left|\frac{x + 3}{x} - 2\right| = \frac{|x - 3|}{x}.$$

Ako uzmemo $\delta := 2\varepsilon$, tada za $x \in (2, 4)$ imamo

$$(0 < |x - 3| < \delta) \Rightarrow \left|\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} - 2\right| = \frac{|x - 3|}{x} < \frac{\delta}{2} = \varepsilon.$$

Prema tome je

$$(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists\delta = 2\varepsilon)\,(\forall x \in (2, 4)) \quad 0 < |x - 3| < \delta \ \Rightarrow\ \left|\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} - 2\right| < \varepsilon.$$

Primenimo sada definiciju 4.2, i posmatrajmo niz $(x_n)_{n\in N}$ sa osobinom da je za svako $n \in N : 2 < x_n < 4$, $x_n \neq 3$ i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$. Tada imamo

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 9}{x_n^2 - 3x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + 3}{x_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + 3)}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = 2.$$

4.2. *Pokazati da funkcija* $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \in R \setminus \{0\}$, *nema graničnu vrednost u tački* $x_0 = 0$*(videtisl. 2.3).*

Rešenje. Posmatraćemo dva niza data sa $x_n = \frac{1}{n\pi}$ i $y_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$, $n = 1, 2, \ldots$, koja teže ka istoj granici 0, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Medjutim, važe jednakosti:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sin \pi n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \sin \pi \frac{4n+1}{2} = 1.$$

Prema definiciji tada 4.2 ne postoji $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

Primedba. Za funkciju f iz zadatka 4.2 ne postoje ni desna ni leva granična vrednost u 0.

4.3. *Ispitati da postoji* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *za sledeće funkcije:*

a) $f(x) = \cos \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\right)$; b) $f(x) = \operatorname{sgn} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Rezultati. a) Da. b) Ne.

4.4. *Neka funkcije* f *i* g *nemaju granične vrednosti u tački* $x = x_0$. *Da li to povlači da sledeće granične vrednosti takodje ne postoje.*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) \quad i \quad \lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x))\ ?$$

Rezultat. Ne. Na primer, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ i $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)$ ne postoje, ali je

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

4.5. *Pokazati da Dirihleova funkcija (zadatak 2.16)*

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{I} := \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}; \\ 1, & x \in \mathbf{Q}. \end{cases}$$

nema graničnu vrednost ni u jednoj tački svoga domena, tj. skupa realnih brojeva.

Rešenje. Koristićemo Hajneovu definiciju 4.2. Neka su data dva niza: niz racionalnih brojeva $(x_n)_{n\in N}$ i niz iracionalnih brojeva $(y_n)_{n\in N}$, koji oba konvegiraju ka a. Tada je za svako $n \in N :$ $D(x_n) = 1$ i $D(y_n) = 0$.

Na osnovu toga je $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n) = 1 \neq \lim\limits_{n\to\infty} D(y_n) = 0$, što znači da granična vrednost funkcije D u tački a ne postoji.

4.6. *Označimo sa* I_i *skup svih iracionalnih brojeva iz intervala* $(-1, 1)$ *i definišimo funkciju* f *na skupu* I_i *sa*

$$f(x) = 1, \quad za \quad x \in I_i.$$

Pokazati da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$, *za svako* $a \in [-1, 1]$.

4.7. *Neka je data funkcija* $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbf{I} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}; \\ 1, & x \in \mathbf{Q}. \end{cases}$ *Pokazati da funkcija* f *ima graničnu vrednost samo u tačkama* $x = 1$ *i* $x = -1$, *ali da ni u jednoj drugoj tački nema graničnu vrednost.*

4.8. *Pokazati da je* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Rešenje. Neka je dato $T > 0$. Tada iz relacija $(x-1)^2 < \frac{1}{T}$ odnosno $\frac{1}{(x-1)^2} > T$, sledi da možemo odrediti $\delta = \frac{1}{\sqrt{T}}$ takvo da je

$$0 < |x - 1| < \frac{1}{\sqrt{T}} = \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(x-1)^2} > T.$$

Iz definicije 4.4 sledi da je $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

4.9. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 9}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^7 + x^6 + 3x^4}{x^6 + x^5 + x^4}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^6 - 3x^5 + 4x^2 - 12x + 10}{x^7 - 8x^5 + 4x^3 + x^2 + x + 1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x^5 - x + 1}{x^7 - x^5 + x^3 - x^2 - x + 1} - \frac{1}{x^2 - 1}\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^6 - x^5 - 5x^4 - 3x^3 + x - 3}{x^8 - 3x^7 - x^6 + 3x^5 + x^2 - x - 6}$.

Rešenja.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{1}{2}.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^7+x^6+3x^4}{x^6+x^5+x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4(x^3+x^2+3)}{x^4(x^2+x+1)} = 3.$

c) Ako je $x = x_0$ nula polinoma $P_n(x)$, tada važi

$$P_n(x) = (x-x_0)Q_{n-1}(x),$$

gde se koeficijenti polinoma $Q_{n-1}(x)$ mogu odrediti po **Hornerovoj šemi**. Ona omogućava veoma jednostavnu proveru da li je je racionalan broj x_0 nula polinoma $P_n(x)$. Naime, deljenje polinoma $P_n(x)$ sa polinomom $x - x_0$ (stepena 1) daje

$$P_n(x) = (x-x_0)Q_{n-1}(x) + r, \tag{4.3}$$

gde je $Q_{n-1}(x)$ polinom stepena $(n-1)$

$$(Q_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_1x + b_0),$$

čiji se koeficijenti $b_{n-1}, ..., b_0$ mogu odrediti na sledeći način

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{n-2} = x_0b_{n-1} + a_{n-1}, ..., \quad b_0 = x_0b_1 + a_1, \tag{4.4}$$

ili

$$b_k = x_0b_{k+1} + a_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

tako da je ostatak r dat sa

$$r = x_0b_0 + a_0.$$

Ako je $r = 0$, tada broj x_0 **jeste** nula polinoma polinoma $P_n(x)$. Ako je medjutim $r \neq 0$, tada broj x_0 **nije** nula polinoma $P_n(x)$.

Hornerova šema se najčešće predstavlja na sledeći način. Najpre u prvu vrstu napišemo *sve* koeficijente datog polinoma funkctije $P_n(x)$, uključujući i one koji su jednaki nuli. Pomoću gore navedenih formula za b_k, $k = 0, 1, .., n-1$, i za r, formiramo šemu:

$$\begin{array}{cccccc|l} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_k & \dots\ a_0 & x = x_0 \\ & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_k & \dots\ b_0 & r. \end{array}$$

Znači u slučaju ovog zadatka imamo

$$\begin{array}{ccccccc|l} 1 & -3 & 0 & 0 & 4 & -12 & 10 & x = 1 \\ & 1 & -2 & -2 & -2 & 2 & -10 & 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc|l} 1 & 0 & -8 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & x = 1 \\ & 1 & 1 & -7 & -7 & -3 & -2 & -1 & 0. \end{array}$$

Sada, možemo pisati

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^6-3x^5+4x^2-12x+10}{x^7-8x^5+4x^3+x^2+x+1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^5-2x^4-2x^3-2x^2+2x-10)}{(x-1)(x^6+x^5-7x^4-7x^3-3x^2-2x-1)} = \frac{13}{18}.$$

d) Iz

$$\begin{array}{cccccccc|l} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & x = 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0. \end{array}$$

sledi da se polinom $P_7(x) = x^7 - x^5 + x^3 - x^2 - x + 1$ može zapisati kao $P_7(x) = (x-1)(x^6+x^5+x^2-1)$, tako da imamo

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^5-x+1}{x^7-x^5+x^3-x^2-x+1} - \frac{1}{x^2-1} \right)$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^5-x+1)(x+1) - x^6 - x^5 - x^2 + 1}{(x-1)(x^6-x^5+x^2-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-2x^2+2}{(x-1)(x^6+x^5+x^2-1)(x+1)} = -\frac{2}{2} = -1.$$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^6-x^5-5x^4-3x^3+x-3}{x^8-3x^7-x^6+3x^5+x^2-x-6} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x^5+2x^4+x^3+1)}{(x-3)(x^7-x^5+x+2)}$
$= \dfrac{433}{1949}$

4.10. *Ako važe jednakosti:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad i \quad \lim_{y\to L} g(y) = K, \tag{4.5}$$

da li tada mora biti

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = K\ ? \tag{4.6}$$

Rezultat. Ne, u opštem slučaju. Na primer, neka je funkcija $f : (0,1) \to \mathbf{R}$ data sa

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{ako je } \ x = p/q,\ p, q \text{ uzajamno prosti prirodni brojevi;} \\ 0, & \text{ako je } \ x \text{ iracionalan broj,} \end{cases}$$

a funkcija $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ neka je data sa

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \ x \neq 0; \\ 0, & \text{ako je } \ x = 0. \end{cases}$$

Tada je $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ i $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = 1$, dok je $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = 0 \neq 1$.

Primedba. Prirodno je pitati se kako da uslovi u (4.5) ne povlače (4.6). Ustvari, iz druge granične vrednosti u (4.5) sledi da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\eta > 0$ tako da važi

$$0 < |y - L| < \eta \Rightarrow |g(y) - K| < \varepsilon.$$

Dalje, na osnovu prve granične vrednosti u (4.5), za dato η postoji $\delta > 0$ tako da je

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \eta.$$

Primetimo da na desnoj strani zadnje implikacije nismo isključili mogućnost $f(x) = L$. Medjutim, u tački $y = L$ funkcija $g(y)$ uopšte ne mora biti definisana, a ako i jeste, tada ne mora biti $g(L)$ jednako sa $\lim\limits_{y\to L} g(L) = K$. Dakle, iz uslova $0 < |x - a| < \delta_2$ *ne* sledi $|g(y) - K| < \varepsilon$.

Ovo razmatranje pokazuje da ako želimo imati postojanje granične vrednosti u (4.6), tada moramo uslovima datim u (4.5) dodati još neki. Ostavljamo čitaocu da pokaže da je jedan takav *dovoljan* uslov:

$$f(x) \neq L \text{ za } x \neq a, \text{ dok je } x \text{ u nekoj okolini tačke } a.$$

4.11. *Neka je n prirodan i a realan broj, i pretpostavimo za funkcije $f_{n,j} : (a, a+1] \to [0, +\infty)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, i $g_j : (a, a+1] \to \mathbf{R}$, $j \in \mathrm{N}$, važe sledeći uslovi:*

1) $\sum\limits_{j=1}^{n} f_{n,j}(x) = 1$, *za sve* $x \in (a, a+1]$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} f_{n,j}(x) = 0$, *za sve* j *i sve* $x \in (a, a+1]$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = L$, *za sve* $x \in (a, a+1]$.

Pokazati da tada niz

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_{n,j}(x)\, g_j(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

konvergira ka L za svako $x \in (a, a+1]$.

Rešenje. Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Na osnovu 3) sledi da postoji broj $J = J(\varepsilon, x)$ sa osobinom

$$j > J \Rightarrow |g_j(x) - L| < \varepsilon/2.$$

Odavde sledi postojanje broja $K > 0$ takvog da važi

$$(\forall j \in \mathrm{N}) \quad |g_j(x)| \leq K \;\text{ i }\; |g_j(x) - L| \leq 2K.$$

Dalje, uslov 2) povlači postojanje broja $N = N(\varepsilon, x) > J$, sa osobinom

$$(\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\})\, (\forall n \in N) \quad |f_{n,j}(x)| < \frac{\varepsilon}{4JK}.$$

Sada, koristeći nenegativnost funkcija $f_{n,j}$ i uslov 1), dobijamo za $n > N$:

$$\begin{aligned}
|S_n(x) - L| &\leq \left|\sum_{j=1}^{n} f_{n,j}(x)\, g_j(x) - L \sum_{j=1}^{n} f_{n,j}(x)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} f_{n,j}(x)|g_j(x) - L| = \left(\sum_{j=1}^{J} + \sum_{j=J+1}^{n}\right) f_{n,j}(x)|g_j(x) - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{4JK} \cdot J \cdot 2K + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=J+1}^{n} f_{n,j}(x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ovo znači da je $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = L$, za sve $x \in (a, a+1]$.

4.12. *Pokazati da ako je funkcija $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$ ograničena u svakom konačnom intervalu (a, b), tada važe sledeće jednakosti:*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x))$, *ako granična vrednost na desnoj strani postoji;*

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)}$, *ako važi uslov $f(x) \geq c > 0$, i ako granična vrednost na desnoj strani postoji.*

Rešenja.

a) Tvrdjenje sledi iz zadatka 4.11, ako se stavi $x_0 > a$,

$$f_{n,1}(x) = \frac{x+1}{x+n}, \quad f_{n,j}(x) = \frac{q}{x+n}, \quad j = 2, 3, \ldots, n, \quad \text{odnosno}$$

$$g_1(x) = \frac{f(x+1)}{x+1}, \quad g_j(x) = f(x+j) - f(x+j-1), \quad j = 2, 3, \ldots,$$

za $x \in (x_0, x_0 + 1]$. Ustvari, tada je

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_{n,j}(x)\, g_j(x) = \frac{f(x+n)}{x+n},$$

i pošto su uslovi pomenutog zadatka zadovoljeni (proveriti!), to je

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x+n) - f(x+n-1)).$$

Sada, po uslovu zadatka, granična vrednost na desnoj strani postoji, ne zavisi od x–a i jednaka je $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))$.

b) Staviti $F(x)=\ln(f(x))$.

4.13. *Pokazati da ako je funkcija $f:(a,+\infty)\to\mathbf{R}$ ograničena odozdo na svakom konačnom intervalu (a,b) i zadovoljava uslov*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=+\infty, \tag{4.7}$$

tada važi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.$$

Rešenje. Iz uslova (4.7) sledi da za svako $M>0$ postoji broj $T>0$ sa osobinom

$$x>T\Rightarrow f(x+1)-f(x)>2M.$$

Ovo povlači $f(x+n)-f(x)>2nM,\ n\in\mathrm{N}$, tj.

$$\frac{f(x+n)}{x+n}>\frac{f(x)+2nM}{x+n}. \tag{4.8}$$

Na osnovu pretpostavke, za svaki interval oblika $(T,T+1)$ postoji broj $c>0$ sa osobinom $f(x)\ge c$, pa iz nejednakosti (4.8) sledi postojanje broja n_0 sa osobinom

$$(n>n_0)\wedge(x\in(T,T+1))\Rightarrow\frac{f(x+n)}{x+n}>M.$$

4.14. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{101}-101x+100}{x^2-2x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$, $m,n\in\mathrm{N}$;

c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{m+1}-x^{n+1}+x^n-mx+m-1}{(x-1)^2}$, $m,n\in\mathrm{N}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $m,n\in\mathrm{N}$.

Rešenja.

a) $$\lim_{x\to1}\frac{x^{101}-101x+100}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2(x^{99}+2x^{98}+\cdots+99x+100)}{(x-1)^2}$$
$$=5050.$$

b) Neka je $m>n>3$. Ako uvedemo smenu $t=x-1$ $(t\to0$ kada $x\to1)$, tada dobijamo

$$\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}=\frac{m}{1-(1+t)^m}-\frac{n}{1-(1+t)^n}$$

$$=\frac{m}{-t^m-\binom{m}{1}t^{m-1}-\cdots-\binom{m}{m-1}t}-\frac{n}{-t^n-\binom{n}{1}t^{n-1}-\cdots-\binom{n}{n-1}t}$$

$$=\frac{\left(-m\frac{n(n-1)}{2}+n\frac{m(m-1)}{2}\right)t+t^2\left(-m\binom{n}{n-3}+n\binom{m}{m-3}\right)+\cdots}{t(t^{m-1}+mt^{m-2}+\cdots+m)(t^{n-1}+nt^{n-2}+\cdots+n)}$$

$$+\frac{t^{n-1}\left(-m+n\binom{m}{m-n}\right)+\cdots+nt^{m-1}}{t(t^{m-1}+mt^{m-2}+\cdots+m)(t^{n-1}+nt^{n-2}+\cdots+n)}$$

odnosno

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{m\cdot n\left(\frac{m-1}{2}-\frac{n-1}{2}\right)+o(t)}{(t^{m-1}+mt^{m-2}+\cdots+m)(t^{n-1}+nt^{n-2}+\cdots+n)}=\frac{m-n}{2}.$$

c) Uvodjenjem smene $t=x-1$ $(t\to0$ kada $x\to1)$, dobijamo

$$\lim_{x\to1}\frac{x^{m+1}-x^{n+1}+x^n-mx+m-1}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(t+1)^{m+1}-(t+1)^{n+1}+(t+1)^n-m(t+1)+m-1}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t^2\left(\frac{(m+1)m}{2}-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right)+o(t^2)}{t^2}=\frac{m^2+m-2n}{2}.$$

Ovde $o(t^2)$ označava funkciju $\phi(t)$ sa osobinom $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\phi(t)}{t^2}=0$ (definicija 4.9, strana 145).

d) Slično kao u prethodnom slučaju imamo

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\frac{n(n-1)}{2}m^2-\frac{m(m-1)}{2}n^2=\frac{mn(n-m)}{2}.$$

4.15. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1},\quad m,n\in\mathrm{N};$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\cdots(x^{n-m-1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\cdots(x^m-1)},\quad m,n\in\mathrm{N},\ m<n.$

Rezultati. a) $\dfrac{m}{n}$. b) $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m-1)}{1\cdot 2\cdots m}$.

4.16. *Pokazati da je* $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a},\ a>0,$ *i* $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt[n]{x}=0,\ n\in\mathrm{N}.$

Rešenje. Neka je $a>0$. Tada, za proizvoljno $\varepsilon>0$, iz relacije

$$|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}a}+\cdots+\sqrt[n]{a^{n-1}}}<\frac{|x-a|}{\sqrt[n]{a^{n-1}}}<\varepsilon,$$

sledi da možemo odrediti δ takvo da važi

$$|x-a|<\delta:=\varepsilon\sqrt[n]{a^{n-1}}\Rightarrow|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}|<\varepsilon.$$

Ako je $a=0$, tada, za $x>0$ i proizvoljno $\varepsilon>0$, sledi da postoji $\delta:=\varepsilon^n$ takvo da je

$$0<x<\delta\Rightarrow|\sqrt[n]{x}|<\varepsilon,$$

što znači da je $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt[n]{x}=0$.

Primedba. Takodje važi i $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$, jer za svako $T>0$ je $\sqrt[n]{x}>T$, čim je $x>T^n$.

4.17. *Odrediti*

a) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2};$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x},\quad n\in\mathrm{Z}\setminus\{0\};$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}\cdot\sqrt[m]{1+bx}-1}{x},\quad m,n\in\mathrm{Z}\setminus\{0\},\ a,b\in\mathrm{R};$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x},$ *gde je* $P(x)=a_1x+\cdots+a_nx^n\ \ m\in\mathrm{Z}\setminus\{0\};$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}},\quad n\in\mathrm{N}.$

a) $$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\lim_{x\to 7}\frac{\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}+\dfrac{3-\sqrt[3]{x+20}}{x-7}}{\dfrac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}+\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3-\sqrt[3]{x+20}}{x-7}}{\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}}=\frac{\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{27}}{\dfrac{1}{32}}=\frac{112}{27}.$$

b) Ako uvedemo $t=\sqrt[n]{1+x}-1$, tada je $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$, što znači da $t\to 0$ kada $x\to 0$. Prema tome, imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(1+t)^n-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{nt+\binom{n}{2}t^2+\cdots+t^n}=\frac{1}{n}.$$

c) Neka je $a,b\neq 0$; tada iz b), sledi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}\cdot\sqrt[m]{1+bx}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+bx}(\sqrt[n]{1+ax}-1)+\sqrt[m]{1+bx}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sqrt[m]{1+bx}\cdot a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{ax}+b\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+bx}-1}{bx}=\frac{a}{n}+\frac{b}{m}.$$

d) Neka je $m\in\mathrm{N}$, (slučaj $-m\in\mathrm{N}$ radi se analogno). Tada imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{P(x)}\cdot\frac{P(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{P(x)}\cdot\lim_{x\to 0}\left(a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}\right)$$

$$=a_1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[m]{(1+P(x))^{m-1}}+\sqrt[m]{(1+P(x))^{m-2}}+\cdots+1}=\frac{a_1}{m}.$$

e) Smenom $t=1-x$, gde $t\to 0$ kada $x\to 1$, dobijamo

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1-t}}{t}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{1-t}}{t}\cdots\frac{1-\sqrt[n]{1-t}}{t}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.$$

4.18. *Odrediti sledeće granične vrednosti.*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{8+x}-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{9+2x-x^2}-\sqrt{3+x+x^2}}{2x-x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{\sqrt[3]{6+x}+x+4}{\sqrt[3]{9+2x}+1}$; d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[7]{x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$, $m, n \in \mathrm{N}$; f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{c+x}-\sqrt[n]{c-x}}{x}$, $n \in \mathrm{N}$, $c > 0$.

Rezultati. a) 12. b) 6/12. c) 2. d) 7/3. e) m/n. f) $\dfrac{2\sqrt[n]{c}}{nc}$.

4.19. *Pokazati da je za $a_n \neq 0$ i $b_m \neq 0$.*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} = \begin{cases} (\operatorname{sgn}\dfrac{a_n}{b_m}) \cdot \infty, & n > m; \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & n = m; \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

Rešenje. Dati izraz se može napisati kao

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}$$

$$= \frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m} \cdot \frac{1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n}x^{-1} + \cdots + \dfrac{a_0}{a_n}x^{-n}}{1 + \dfrac{b_{m-1}}{b_m}x^{-1} + \cdots + \dfrac{b_0}{b_m}x^{-m}}. \tag{4.9}$$

Pretpostavimo da je $n > m$. Kako je,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{-1} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}x^{-n}\right) = 0, \quad \text{i}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{b_{m-1}}{b_m}x^{-1} + \cdots + \frac{b_0}{b_m}x^{-m}\right) = 0,$$

to postoje pozitivni brojevi X_1 i X_2 takvi da važi sledeća nejednakost

$$\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{-1} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}x^{-n}\right| \le \frac{1}{2}, \quad \text{za} \quad x > X_1, \quad \text{i}$$

$$\left|\frac{b_{m-1}}{b_m}x^{-1} + \cdots + \frac{b_0}{b_m}x^{-m}\right| \le \frac{1}{2} \quad \text{za} \quad x > X_2.$$

Za $x \ge \max\{X_1, X_2\}$, dobijamo

$$x^{n-m} \left| \frac{1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n}x^{-1} + \cdots + \dfrac{a_0}{a_n}x^{-n}}{1 + \dfrac{b_{m-1}}{b_m}x^{-1} + \cdots + \dfrac{b_0}{b_m}x^{-m}} \right|$$

$$\ge \; x^{n-m} \cdot \frac{1 - \left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}x^{-1} + \cdots + \dfrac{a_0}{a_n}x^{-n}\right|}{1 + \left|\dfrac{b_{m-1}}{b_m}x^{-1} + \cdots + \dfrac{b_0}{b_m}x^{-m}\right|} \ge x^{n-m} \frac{1 - \dfrac{1}{2}}{1 + \dfrac{1}{2}} = \frac{x^{n-m}}{3}.$$

Zbog $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{m-n} = +\infty$, imamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} = \left(\operatorname{sgn}\frac{a_n}{b_m}\right) \cdot \infty.$$

Ako je $m = n$, tada iz relacije (4.9) sledi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0} = \frac{a_n}{b_m}.$$

Na kraju, ako je $n < m$, tada iz $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{m-n} = 0$ i relacije (4.9) imamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_0}$$

$$= \frac{a_n}{b_m} \cdot \lim_{x\to+\infty} x^{n-m} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n}x^{-1} + \cdots + \dfrac{a_0}{a_n}x^{-n}}{1 + \dfrac{b_{m-1}}{b_m}x^{-1} + \cdots + \dfrac{b_0}{b_m}x^{-m}} = \frac{a_n}{b_m} \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

4.20. *Odrediti sledeće granične vrednosti.*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^4+x^2+2x+3}{3x^4+x^2+x+3}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5+3x^2+2x+5}{x^4+x^2+x+3}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x}\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x} + x\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)} - x\right)$.

Rešenja.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4+x^2+2x+3}{3x^4+x^2+x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4\left(2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}\right)}{x^4\left(3+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}\right)}=\dfrac{2}{3}.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5+3x^2+2x+5}{4x^4+x^2+x+3}=+\infty.$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^5}}}}}=1.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)$

$+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+3x^2}+x^2}$

$+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x+\sqrt{x^2-2x}}=2.$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\dfrac{2x\left(\sqrt{x^2+2x}-x-1\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x+1\right)}=-\dfrac{1}{4}.$

f) Za $x=\dfrac{1}{t}$, gde $t\to 0+$ kada $x\to+\infty$, imamo

$$\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}-x=\frac{\sqrt[n]{1+P(t)}-1}{t},$$

gde je $P(t)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)t+(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)t^2+\cdots+a_1a_2\cdots a_nt^n$. Iz zadatka 4.17 d) sledi

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}-x\right)$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt[n]{1+P(t)}-1}{t}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

4.21. *Odrediti sledeće granične vrednosti funkcije.*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+2)(3-5x)}{(2x+1)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x^3+2x-1)^6}{(3x^6+8x^2+1)^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^4+2x^3}{1+x^3}-x\right)$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{2x+1}+\dfrac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2}\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+2x^2-1}-\sqrt{x^4-2x^2-1}\right)$;

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2}}}}-x\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{x^4+x^2\sqrt{x^4+1}}-\sqrt{2x^4}\right)$.

Rezultati. a) $-5/4$. b) 27. c) 2. d) $-9/4$. e) 2.
f) $1/2$. g) $(\sqrt{2})/8$.

4.22. *Pretpostavimo da važe sledeće nejednakosti*

$$g_1(x)\le f(x)\le g_2(x)$$

na intervalu (α,β), *sem možda u tački* $x_0\in(\alpha,\beta)$. *Ako postoji broj* L *takav da je*

$$\lim_{x\to x_0}g_1(x)=\lim_{x\to x_0}g_2(x)=L,$$

dokazati da je tada $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$.

4.23. *Pokazati da je*

a) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$; b) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$;

c) $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}x_0,\ x_0\ne\dfrac{2n-1}{2}\pi,\ n\in Z$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Rešenje.

a) Iz $0\le|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\dfrac{x-x_0}{2}\cos\dfrac{x-x_0}{2}\right|$

$\le 2\left|\sin\dfrac{x-x_0}{2}\right|\le|x-x_0|$, sledi da za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta=\varepsilon$ tako da je

$$|\sin x-\sin x_0|\le|x-x_0|<\delta=\varepsilon.$$

b) Iz $0\le|\cos x-\cos x_0|=2\left|\sin\dfrac{x-a}{2}\sin\dfrac{x+a}{2}\right|\le|x-a|$, sledi $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$.

c) $\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{tg} x = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} \sin x}{\lim\limits_{x\to x_0} \cos x} = \dfrac{\sin x_0}{\cos x_0} = \operatorname{tg} x_0$, ako je $\cos x_0 \neq 0$, odnosno ako je $x_0 \neq \dfrac{2n-1}{2}\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

4.24. *Odrediti sledeće granične vrednosti*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, $\quad 0 \neq a, b \in \mathbb{R}$; $\qquad$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2}{\sin 2x \sin x} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x^3 - 1}{\sin^6 2x}$; $\qquad$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg(a+x)tg(a-x) - tg^2 a}{x^2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}$.

U d) i e) pretpostavljamo da je $a \neq 0$.

Rešenja.

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{a \cdot \dfrac{\sin ax}{ax}}{b \cdot \dfrac{\sin bx}{bx}} = \frac{a}{b}.$$

b) $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\sin 2x \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - 2\sin x \cos x}{\sin 2x \sin^2 x}$$
$$= \lim_{x\to 0} 2\frac{1-\cos x}{\sin 2x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1-\cos x}{x^2}}{\dfrac{\sin 2x \sin x}{2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2\sin^2(x/2)}{4(x/2)^2}}{\dfrac{\sin 2x}{2x} \cdot \dfrac{\sin x}{x}} = \frac{1}{2}.$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x^3 - 1}{\sin^6 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 x^3}{\sin^6 2x} = -2 \lim_{x\to 0} \left(\frac{\left(\dfrac{\sin x^3}{x^3}\right)^2}{2^6 \left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\right)^6} \right) = -\frac{1}{32}.$$

d) $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg}^2 a \right)$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2}(\operatorname{tg}^4 a - 1) = -\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}.$$

e) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}((\cos(a+2x) - \cos(a+x)) - (\cos(a+x) - \cos a))$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \left(-2\sin\frac{x}{2} \cdot \sin\left(a + \frac{3x}{2}\right) + 2\sin\frac{x}{2} \cdot \sin\left(a + \frac{x}{2}\right)\right)$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin\dfrac{x}{2}}{x^2} \left(\sin\left(a + \frac{3x}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{x}{2}\right)\right)$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin\dfrac{x}{2} \cdot 2\sin\dfrac{x}{2} \cdot \cos(a+x)}{x^2} = -\cos a.$$

4.25. *Odrediti sledeće granične vrednosti.*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{x}$; $\qquad$ b) $\lim\limits_{x\to 0} 3x \operatorname{ctg} 3x$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sin 7x - \sin 9x}$; $\qquad$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin ax - \cos ax}$; $\qquad$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ctg}(a+2x) - 2\operatorname{ctg}(a+x) + \operatorname{ctg} a}{x^2}$.

U e) i f), pretpostavljamo da je $a \neq 0$.

Rezultati. a) 5. b) 1. c) $-1/2$. d) $4/3$.
e) $1/a$. f) $(2\cos a)/(\sin^3 a)$.

4.26. *Odrediti*

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin 4\pi x}{\sin 5\pi x}$; $\qquad$ b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a}$, $a \neq k\pi$;

c) $\lim\limits_{x\to \pi/3} \dfrac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}$; $\qquad$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x^2 \left(\cos\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{3}{x}\right)$.

Rešenja.

a) Smenom promenljivih $t = x - 1$, $t \to 0$ kada $x \to 1$, dobijamo
$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin 4\pi x}{\sin 5\pi x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(4\pi(t+1))}{\sin(5\pi(t+1))} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(4\pi t)}{-\sin(5\pi t)} = -\frac{4}{5}.$$

b) $$\lim_{x\to a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{\sin(a-x)}{\sin x \sin a} \cdot \frac{1}{x-a} = -\frac{1}{\sin^2 a}.$$

c) $$\lim_{x\to\pi/3}\frac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}=\lim_{x\to\pi/3}\frac{\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}\right)}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}$$
$$=-\lim_{x\to\pi/3}\operatorname{tg} x\left(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(\pi/2-(x+\frac{\pi}{6})\right)}=-24.$$

d) $$\lim_{x\to+\infty}3x^2\left(\cos\frac{1}{x}-\cos\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}3x^2\left(2\sin\frac{1}{x}\sin\frac{2}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}3\cdot2\cdot2\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}=12.$$

4.27. *Odrediti sledeće granične vrednosti.*

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{1-x^3}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/3}\frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{2\cos^2 x-3\cos x+1}$; d) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\cos(x+\pi)-\cos(3x+\pi)}{(x-\pi)^2}$.

Rezultati. a) $1/(2\pi)$. b) $-1/3$. c) -3; d) 4.

4.28. *Odrediti sledeće granične vrednosti.*

a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2\sin(\sqrt{x+1}-1)}{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[n]{\cos bx}}{x^2}$; d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$,

gde u c) pretpostavljamo da su $m,n\in\mathbf{N}$ *i* $a,b,\in\mathbf{R}$.

Rešenja.

a) $$\lim_{x\to0}\frac{2\sin(\sqrt{x+1}-1)}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}}{\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=1.$$

b) $$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)}{1+x\sin x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}=\frac{4}{3}.$$

c) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[n]{\cos bx}}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt[m]{\cos ax}-1}{x^2}-\frac{\sqrt[n]{\cos bx}-1}{x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{n}-\frac{a^2}{m}\right).$$

d) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=2\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right.$$
$$\left.\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right)\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}.$$

Kako je $|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}|\le1$ za sve $x\in\mathbf{R}$, to je

$$|\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})|\le\lim_{x\to+\infty}|2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}|\cdot1=0.$$

Tako je $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=0$.

4.29. *Odrediti sledeće granične vrednosti.*

a) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{3}-\sqrt{2+\cos x}}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sqrt[4]{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}$; d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$.

Rezultati. a) $4\sqrt{3}$. b) $-1/12$. c) $1/24$. d) 0.

4.30. *Pokazati da je*

a) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\arcsin x=\arcsin x_0,\ x\in[-1,1]$; b) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\arccos x=\arccos x_0,\ x\in[-1,1]$;
c) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\operatorname{arctg} x=\operatorname{arctg} x_0,\ x\in\mathbf{R}$; d) $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\operatorname{arcctg} x=\operatorname{arcctg} x_0,\ x\in\mathbf{R}$.

4.31. *Odrediti sledeće granične vrednosti.*

a) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\pi-4\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}{x}$.

Rešenja.

a) Smenom promenljivih $t = \arcsin(x+2)$, tj. $\sin t = x + 2$, gde $t \to 0$ kada $x \to -2$, dobijamo

$$\lim_{x\to-2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x} = \lim_{x\to-2} \frac{1}{x} \cdot \frac{\arcsin(x+2)}{x+2} = -\frac{1}{2} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = -\frac{1}{2}.$$

b) Smenom promenljivih $t = \pi - 4\mathrm{arctg}\frac{1}{x+1}$, tj. $x = \mathrm{ctg}\,\frac{\pi - t}{4} - 1$, gde $t \to 0$ kada $x \to 0$, dobijamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\pi - 4\mathrm{arctg}\frac{1}{1+x}}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\mathrm{ctg}\,\frac{\pi-t}{4} - 1}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t\sin\frac{\pi-t}{4}\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi-t}{4}\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sin\frac{t}{4}} = 2.$$

4.32. *Odrediti sledeće granične vrednosti.*

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{3x}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{arctg}2x}{x}$.

Rezultati. a) $1/3$. b) 2.

4.33. *Pokazati da je*

a) $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$; b) $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$.

Rešenja.

a) U glavi 3. (zadatak 3.49) je pokazano da važi

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Ako označimo sa $[x]$ najveći ceo od x, tada je $[x] = n \in \mathrm{N}$, pa kada $n \to \infty$ tada i $x \to \infty$. Dalje je

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = e.$$

Za $x > 0$ važi

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

pa na osnovu zadatka 4.22 sledi da je $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

b) Ako $x \to 0+$, tada $t = \frac{1}{x}$ imamo $t \to +\infty$ i iz a) dobijamo

$$\lim_{x\to 0+} (1+x)^{1/x} = \lim_{t\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e.$$

Ako $x \to 0-$, tada za $s = -\frac{1}{x}$ važi $s \to +\infty$ i imamo

$$\lim_{x\to 0-} (1+x)^{1/x} = \lim_{s\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{-s} = \lim_{s\to+\infty} \left(\frac{s}{s-1}\right)^s$$

$$= \lim_{s\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{s-1}\right)^{s-1} \cdot \lim_{s\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{s-1}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Na osnovu teoreme 4.1, iz

$$\lim_{x\to 0-} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0+} (1+x)^{1/x} = e,$$

sledi $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$.

4.34. *Pokazati da je*

a) $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, $a > 0$, $x_0 \in \mathbf{R}$; b) $\lim_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0$, $x_0 > 0$;

c) $\lim_{x\to x_0} (u(x))^{v(x)} = a^b$, $x_0 \in \mathbf{R}$.

U c), pretpostavljamo da je $u(x) > 0$ *i da postoje* $a > 0$ *i* b *takvo da*

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = a \quad i \quad \lim_{x\to x_0} v(x) = b.$$

Rešenje.

a) Neka je $a > 1$. U zadatku 3.5 b) pokazano je da je $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} a^{-1/n} = 1$, tako da za dato $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathrm{N}$ takvo da za $a > 1$ važi

$$1 - \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} < a^{-1/n_0} < a^{1/n_0} < 1 + \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}.$$

Funkcija a^x, $a > 1$ je monotono rastuća na skupu $\mathbf{R}$. Ako pretpostavimo da je $|x - x_0| < \frac{1}{n_0}$, tada iz $-\frac{1}{n_0} < x - x_0 < \frac{1}{n_0}$, sledi

$$1 - \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} < a^{-1/n_0} < a^{x-x_0} < a^{1/n_0} < 1 + \frac{\varepsilon}{a^{x_0}},$$

odakle imamo $-\frac{\varepsilon}{a^{x_0}} < a^{x-x_0} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}$. Za $\delta := \frac{1}{n_0}$ i $|x - x_0| < \delta$, pa je

$$|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon.$$

Za $a > 1$, sledi $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$ za $x_0 \in \mathbb{R}$. U slučaju kada je $0 < a < 1$, tj. za $a = \frac{1}{b}$, $b > 1$, je $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{b^{x_0}} = a^{x_0}$.

b) Na osnovu nejednakosti

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad \text{i} \quad -\frac{1}{n-1} < \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) < -\frac{1}{n},\ n > 1,$$

možemo pisati

$$-\frac{1}{n-1} < \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

(Logaritamska funkcija je monotono rastuća). Za dato $\varepsilon > 0$ i $\varepsilon \le \frac{1}{2}$, postoji n_0 takvo da

$$-\varepsilon < -\frac{1}{n_0-1} < \ln\left(1-\frac{1}{n_0}\right) < \ln\left(1+\frac{1}{n_0}\right) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon. \tag{4.10}$$

Ako je $|x - x_0| < \frac{x_0}{n_0}$, tada imamo

$$-\frac{1}{n_0} < \frac{x-x_0}{x_0} < \frac{1}{n_0}. \tag{4.11}$$

Iz relacija (4.10) i (4.11) dobijamo

$$-\varepsilon < \ln\left(1-\frac{1}{n_0}\right) < \ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right) < \ln\left(1+\frac{1}{n_0}\right) < \varepsilon.$$

To znači da je $\left|\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)\right| < \varepsilon$, odnosno $|\ln x - \ln x_0| < \varepsilon$, pod uslovom da je $|x - x_0| < \delta$, gde je $\delta := \frac{x_0}{n_0}$. Tako imamo za $x_0 > 0$

$$\lim_{x\to x_0} \ln x = \ln x_0.$$

c) Iz a) i b) dobijamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)} &= \lim_{x\to x_0}\exp(v(x)\ln u(x)) = \exp\left(\lim_{x\to x_0} v(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\ln u(x)\right)\\ &= e^{b\ln a} = a^b.\end{aligned}$$

4.35. *Ako funkcije $u(x)$ i $v(x)$ zadovoljavaju uslove*

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = 1 \quad i \quad \lim_{x\to x_0} v(x) = \infty.$$

Pokazati da tada važi

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \exp\left(\lim_{x\to x_0}(u(x)-1)\,v(x)\right), \tag{4.12}$$

ako poslednja granična vrednost postioji.

Rešenje. Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} &= \lim_{x\to x_0}\left(1+(u(x)-1))^{1/(u(x)-1)}\right)^{(u(x)-1)v(x)}\\ &= \lim_{x\to x_0}\exp\left((u(x)-1)v(x)\ln(1+(u(x)-1))^{1/(u(x)-1)}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{x\to x_0}(u(x)-1)\,v(x)\right).\end{aligned}$$

4.36. *Odrediti sledeće granačne vrednosti.*

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{2/x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-\operatorname{ctg}^2 x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin^3 x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$.

Rešenja. Koristićemo zadatak 4.35.

a) Ako je $u(x) = \sqrt{1+x} - x$ i $v(x) = \frac{2}{x}$, tada je

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x) = 1 \ \text{ i } \ \lim_{x\to 0+} v(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{2}{x} = +\infty.$$

Tada dobijamo

$$(u(x)-1)\,v(x) = \left(\sqrt{1+x}-(x+1)\right)\frac{2}{x}.$$

Iz formule (4.12) dobijamo

$$\lim_{x\to 0+}(\sqrt{1+x}-x)^{2/x} = \exp\left(\lim_{x\to 0+}\frac{2}{x}(\sqrt{1+x}-(x+1))\right) = e^{-1}.$$

Može se pokazati da je $\lim\limits_{x\to 0-}(\sqrt{1+x}-x)^{2/x} = \frac{1}{e}$, pa je

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{2/x} = \frac{1}{e}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{-\operatorname{ctg}^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}(1-\sin^2 x)^{-\cos^2 x/(2\sin^2 x)} = \sqrt{e}.$

c) Ako označimo sa $u(x) = \frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}$ i $v(x) = \frac{1}{\sin^3 x}$, tada imamo

$$(u(x)-1)\,v(x) = \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin^3 x} = \frac{\operatorname{tg} x(1-\cos x)}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin^3 x}$$

$$= \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x(1+\sin x)} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Tako je

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin^3 x} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x(1+\sin x)\sin^2 x}\right) = \sqrt{e}.$$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x} = 1.$

4.37. *Odrediti*

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2-1}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}(1+\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$; d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x^4)^{\operatorname{ctg}^4 x}$.

Rezultati. a) $\dfrac{1}{e}$. b) e^4. c) e. d) e.

4.38. *Odrediti*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{\log_5 x-1}{x-5}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\log_3\frac{x+5}{x+3}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x+x^2)+\ln(1-4x+x^2)}{2x^2}$; d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\sin x}{\ln(1+x)}$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 4x}{\ln\cos 3x}$; f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{x}\right)\right)$;

g) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

Rešenja.

a) $$\lim_{x\to 5}\frac{\log_5 x-1}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{\log_5 x-\log_5 5}{x-5} = \lim_{x\to 5}\log_5\left(\frac{x}{5}\right)^{1/(x-5)}$$

$$= \lim_{x\to 5}\log_5\exp\left(\ln\left(1+\frac{x-5}{5}\right)^{(5/(x-5))\cdot 1/5}\right) = \frac{1}{5}\log_5 e = \frac{1}{5\ln 5}.$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} x\log_3\frac{x+5}{x+3} = \frac{1}{\ln 3}\cdot\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{x} = \frac{2}{\ln 3}.$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x+x^2)+\ln(1-4x+x^2)}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\ln(1-14x^2+x^4)^{1/(2x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\ln(1-14x^2+x^4)^{1/(x^2(x^2-14))}\right)^{(x^2-14)/2} = -7.$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\sin x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+x}-2-\sin x}{x}\cdot\left(\ln(1+x)^{1/x}\right)^{-1}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x)^{1/x}\right)^{-1} = -\frac{3}{4}.$$

e) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 4x}{\ln\cos 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 4x}{\sin^2 3x}\cdot\frac{\ln(1-\sin^2 4x)^{-1/\sin^2 4x}}{\ln(1-\sin^2 3x)^{-1/\sin^2 3x}} = \frac{16}{9}.$$

f) $$\lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\sin^2\frac{\pi}{x}\right)^{x^2} = -\frac{\pi^2}{2}.$$

g) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\left(1+3^{-t}\right)}{\ln\left(1+2^{-t}\right)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{2^t}{3^t}\cdot\frac{\ln\left(1+3^{-t}\right)^{3^t}}{\ln\left(1+2^{-t}\right)^{2^t}} = 0.$$

h) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln 3+\ln\left(1+\frac{1}{3^x}\right)}{x\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2^x}\right)} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

4.39. *Odrediti*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^b-1}{x}$, $b\in\mathbf{R}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^b x}{x^2}$, $b\in\mathbf{R}$; d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-(\cos x)^{2\sqrt{3}}}{x^2}$.

Rešenja.

a) Smenom promenljivih $t = e^x-1$, tj. $x = \ln(t+1)$, gde $t\to 0$ kada $x\to 0$, dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)} = \lim_{t\to 0}\left(\ln(t+1))^{\frac{1}{t}}\right)^{-1} = 1.$$

b) Za $b=0$ je trivialno. Za $b\neq 0$, važi

$$\frac{(1+x)^b-1}{x} = \frac{e^{b\ln(1+x)}-1}{b\ln(1+x)}\cdot\frac{b\ln(1+x)}{x}.$$

Kako je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{b\ln(1+x)}-1}{b\ln(1+x)}=1$ i $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b\ln(1+x)}{x}=b$, dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^b-1}{x}=b.$$

c) Za $b=0$ granična vrednost je nula. Za $b\neq 0$, kao u b), možemo pisati

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^b x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{b\ln(\cos x)}}{b\ln(\cos x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{b\ln(\cos x)}{x^2}=1\cdot b\cdot\frac{1}{2}=\frac{b}{2}.$$

d) Iz a) i c) imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-(\cos x)^{2\sqrt{3}}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{2\sqrt{3}}}{x^2}=1+\sqrt{3}.$$

4.40. *Odrediti sledeće granične vrednosti za $a>0$:*

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$; b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$; c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$

za $a>0$

Rešenja.

a) Pomoću zadatka 4.39 b), dobijamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a} &= a^a\lim_{x\to a}\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-\lim_{x\to a}\frac{\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a-1}{\frac{x-a}{a}}\cdot a^{a-1}\\ &= a^a\ln a-a\cdot a^{a-1}=a^a\ln(a/e).\end{aligned}$$

b) Iz $\dfrac{x^x-a^a}{x-a}=\dfrac{x^x-x^a}{x-a}+\dfrac{x^a-a^a}{x-a}$, i iz $\lim\limits_{x\to a}(x-a)\ln x=0$, sledi

$$\lim_{x\to a}\frac{x^x-x^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{e^{a\ln x}\left(e^{(x-a)\ln x}-1\right)}{(x-a)\ln x}\cdot\ln x=a^a\ln a.$$

Iz zadatka 4.39 b), imamo

$$\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^{a-1}\left(\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a-1\right)}{\frac{x-a}{a}}=a^a,$$

tako da je

$$\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=a^a(\ln a+1)=a^a\ln(ae).$$

c) $$\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}=\lim_{x\to a}\frac{a^{a^x-x^a}-1}{a^x-x^a}\cdot\lim_{x\to a}a^{x^a}=\lim_{t\to 0}\frac{a^t-1}{t}a^{a^a}=a^{a^a}\ln a,$$

jer smo stavili $t=a^x-x^a$ i $t\to 0$ kada $x\to a$.

4.41. *Odrediti*

a) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{x+|x|}{2x}$; $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x+|x|}{2x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0-}\arcsin(x+1)$; $\lim\limits_{x\to 0+}\arcsin(x+1)$;

c) $\lim\limits_{x\to 0-}e^{\operatorname{ctg}x}$; $\lim\limits_{x\to 0+}e^{\operatorname{ctg}x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{1}{x^2+e^{\frac{1}{2-x}}}$; $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{1}{x^2+e^{\frac{1}{2-x}}}$.

Rezultati. a) 0, 1. b) $\pi/2$, nemoguće. c) 0, $+\infty$. d) 0, 1/4.

4.42. *Odrediti*

a) $\lim\limits_{x\to 1-}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$, $\lim\limits_{x\to 1+}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$, $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{|x|}\right)^x$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{|x|}\right)^x$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+2x+1}\right)$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+2x+1}\right)$.

Rezultati. a) $\pi/2$, $-\pi/2$. b) 1, 0. c) e^{-1}, e. d) $-3/2$, $3/2$.

4.43. *Odrediti*

a) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\operatorname{th}x}{2x}$.

Rešenja. Podsetimo se da je

$$\operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\qquad \operatorname{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\qquad\text{i}\qquad \operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sh}x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x} = \lim\limits_{x\to0} e^{-x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x} = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{ch}x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tgh}x}{2x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sh}x}{x}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}x} = \frac{1}{2}.$

4.44. *Pokazati da za* $a>1$, $k>0$, *važi*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=0.$

Rešenja.

a) Iz zadatka 3.15, imamo $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$, pa je $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{a^n}=0$. To znači da postoji $n_0\in N$ takvo da za dato $\varepsilon>0$, važi

$$\frac{(n+1)^k}{a^n}<\varepsilon,\quad \text{za svako}\quad n>n_0.$$

Ako označimo sa $n=[x]$, tada imamo $n\le x<n+1$ i

$$0<\frac{x^k}{a^x}<\frac{(n+1)^k}{a^n}<\varepsilon,\quad\text{za}\quad n>n_0.$$

b) Neka je $t=x^k$, $t\to+\infty$ kada $x\to+\infty$, dobijamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=\frac{1}{k}\cdot\lim_{t\to+\infty}\frac{\log_a t}{t}.$$

Iz zadatka 3.15 sledi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a n}{n}=0$, pa je $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a(n+1)}{n}=0$, što znači da za dato $\varepsilon>0$, postoji $n_0\in N$, takvo da za $n>n_0$ važi

$$0\le\frac{\log_a(n+1)}{n}\le\varepsilon.$$

Za $t>n_0+1$ i $n=[t]$ (tada je $n>n_0$), možemo pisati

$$0\le\frac{\log_a t}{t}\le\frac{\log_a(n+1)}{n}\le\varepsilon,\quad\text{tj.}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=0.$$

4.45. *Pokazati da je* $\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=0$. *(Videti sliku 2.4.)*

Rešenje. Za proizvoljno $\varepsilon>0$, sledi iz relacije

$$\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}-0\right|=\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|,$$

da postoji $\delta=\varepsilon$, takvo da važi sledeća implikacija

$$0<|x|<\delta\Rightarrow\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right|<\varepsilon.$$

Primedba. Može se pokazati i

$$\lim_{x\to0+}\left(x^\alpha\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=0,\qquad\alpha>0.$$

4.46. *Odrediti sledeće granične vrednosti.*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}((x+3)\ln(x+3)-2(x+2)\ln(x+2)+(x+1)\ln(x+1))$;

b) $\lim\limits_{x\to0+}\ln(x\ln b)\ln\left(\frac{\ln bx}{\ln\frac{x}{b}}\right)$, $b>1$.

Rešenja.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}((x+3)\ln(x+3)-2(x+2)\ln(x+2)+(x+1)\ln(x+1))$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{(x+3)^{x+3}(x+1)^{x+1}}{(x+2)^{2(x+2)}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{x+2}(x+3)}{\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+1}(x+2)}\right)$$

$$=0.$$

b) $\lim\limits_{x\to0+}\ln(x\ln b)\ln\left(\frac{\ln bx}{\ln\frac{x}{b}}\right)=\lim\limits_{x\to0+}\ln(x\ln b)\cdot\ln\left(1+\frac{\ln bx-\ln\frac{x}{b}}{\ln\frac{x}{b}}\right)$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(x\ln b)\ln b^2}{\ln\frac{x}{b}}\cdot\ln\left(1+\frac{\ln b^2}{\ln\frac{x}{b}}\right)^{\ln(x/b)/\ln b^2}=\ln b^2.$$

4.2 Asimptote grafika funkctija

Definicija 4.5. *Prava* $x=x_0$ *je* **vertikalna asimptota** *grafika funkcije* $f:A\to\mathbf{R}$ *ako najmanje jedna od sledećih graničnih vrednosti*

$$\lim_{x\to x_0+}f(x)\quad ili\quad\lim_{x\to x_0-}f(x)$$

jeste ili $+\infty$ *ili* $-\infty$.

Definicija 4.6. *Prava $y = n$ je* **horizontalna asimptota** *kada $x \to +\infty$ (resp. kada $x \to -\infty$) grafika funkcije $f : A \to \mathbb{R}$ ako važi*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = n \quad (resp. \lim_{x\to-\infty} f(x) = n).$$

Definicija 4.7. *Prava $y = kx + n$, $k \neq 0$, je* **kosa asimptota** *kada $x \to +\infty$ (resp. kada $x \to -\infty$) grafika funkcije $f : A \to \mathbb{R}$ ako važi*

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + n)) = 0 \quad (resp. \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (kx + n)) = 0).$$

Brojevi k i n se mogu odrediti iz sledećih formula

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (\text{resp. } k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}) \\ n &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) \quad (\text{resp. } n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx)), \end{aligned} \tag{4.13}$$

pod uslovom da granične vrednosti u (4.13) postoje kada $x \to +\infty$ (resp. kada $x \to -\infty$).

4.2.1 Zadaci

4.47. *Odrediti asimptote grafika sledećih funkcija.*

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$; b) $f(x) = \ln \dfrac{1 - x}{1 + x}$;

c) $f(x) = \dfrac{3x}{1 + x^2}$; d) $f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}$;

e) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$; f) $f(x) = \arcsin e^{-x}$.

Rešenja.

a) Funkcija f je definisana na intervalu $(-3, 3)$. Iz

$$\lim_{x\to-3+} \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} = -\infty, \quad \lim_{x\to 3-} \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} = +\infty,$$

sledi da grafik funkcije f ima vertikalne asimptote $x = 2$ i $x = -2$.

b) Funkcija f je definisana na intervalu $(-1, 1)$. Iz

$$\lim_{x\to-1+} \ln \frac{1 - x}{1 + x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1-} \ln \frac{1 - x}{1 + x} = -\infty,$$

sledi da grafik funkcije f ima vertikalne asimptote $x = 1$ i $x = -1$.

c) Grafik funkcije f ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kada $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$, jer je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{1 + x^2} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{1 + x^2} = 0.$$

d) Funkcija f je definisana na intervalu $[1, +\infty)$. Grafik funkcije f nema vertikalnu asimptotu, jer je

$$\lim_{x\to 1+} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}) = \sqrt{2}.$$

Funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kada $x \to +\infty$, jer je

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}) = 0.$$

e) Funkcija f je definisana na intervalu $[0, 4]$. Ona nema asimptota.

f) Funkcija f je definisana intervalu na $[0, +\infty)$. Nema vertikalnih asimptota, jer je $\lim\limits_{x\to 0+} \arcsin e^{-x} = \dfrac{\pi}{2}$. Kako je $\lim\limits_{x\to\infty} \arcsin e^{-x} = 0$, sledi da grafik funkcije f ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kada $x \to +\infty$.

4.48. *Odrtediti asimptote grafika sledećih funkcija.*

a) $f(x) = \dfrac{2}{1 - x^2}$; b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; c) $f(x) = \arctan x$;

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; e) $f(x) = \ln(1 + e^x)$; f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 3}$.

Rešenja.

a) Prirodni domen funkcije f je skup $\mathbb{R}\setminus\{1, -1\}$. Njen grafik ima vertikalne asimptote $x = 1$ i $x = -1$, jer je

$$\lim_{x\to 1+} \frac{2}{1 - x^2} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-1+} \frac{2}{1 - x^2} = +\infty.$$

(Primetimo da je $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{2}{1 - x^2} = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to-1-} \dfrac{2}{1 - x^2} = -\infty$.) Grafik date funkcije ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$, jer je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1 - x^2} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1 - x^2} = 0.$$

b) Grafik funkcije f ima vertikalnu asimptotu $x = 0$ i kosu asimptotu $y = x$ kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$, jer je

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = 1 \quad \text{i} \quad n = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = 0.$$

c) Grafik funkcije f ima dve horizontalne asimptote, tj. $y = -\pi/2$ kada $x \to -\infty$ i $y = \pi/2$ kada $x \to +\infty$.

d) Grafik funkcije f ima dve kose asimptote, ustvari $y = -x$ kada $x \to -\infty$ i $y = x$ kada $x \to +\infty$.

e) Grafik funkcije f ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kada $x \to -\infty$, jer je $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 + e^x) = 0$. Primetimo da je $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^x) = +\infty$, pa funkcija nema horizontalnu asimptotu kada $x \to +\infty$. Medjutim, ona ima kosu asimptotu $y = x$ kada $x \to +\infty$, jer je

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to +\infty} (\ln(1 + e^x) - x) = 0.$$

f) Grafik funkcije f ima vertikalnu asimptotu $x = 3$ i kosu asimptotu $y = x + 3$ kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$.

4.49. *Odrediti asimptote grafika sledećih funkcija.*

a) $f(x) = x^4 e^x$; b) $f(x) = e^{-x^4}$; c) $f(x) = e^{1/x}$;

d) $f(x) = e^{-1/x^2}$; e) $f(x) = e^{1/x^2}$; f) $f(x) = xe^{-1/x}$.

Rešenja. Grafik funkcije f ima

a) horizontalnu asimptotu $y = 0$ kada $x \to -\infty$;

b) horizontalnu asimptotu $y = 0$ kada $x \to +\infty$, i takodje kada $x \to -\infty$;

c) vertikalnu asimptotu $x = 0$ i horizontalnu asimptotu $y = 1$ kada $x \to -\infty$ i kada $x \to +\infty$;

d) horizontalnu asimptotu $y = 1$ kada $x \to -\infty$ i $x \to +\infty$, jer je

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-1/x^2} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to +\infty} e^{-1/x^2} = 1,$$

ali nema vertikalnu asimptotu, jer je

$$\lim_{x \to 0-} e^{-1/x^2} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 0+} e^{-1/x^2} = 0;$$

e) vertikalnu asimptotu $x = 0$ i horizontalnu asimptotu $y = 1$ kada $x \to -\infty$ i takodje kada $x \to +\infty$;

f) vertikalnu asimptotu $x = 0$ i kosu asimptotu $y = x - 1$ kada $x \to -\infty$ i kada $x \to +\infty$.

4.3 Asimptotsko ponašanje

U ovom delu pretpostavićemo da domeni funkcije f i g sadrže skup $(a, x_0) \cup (x_0, b)$.

Definicija 4.8. *Funkcija f se* **ponaša kao** *funkcija g kada x teži x_0 ako postoji funkcija ϕ takva da važi*

$$f(x) = \phi(x) \cdot g(x), \; x \in (a, b), \; x \neq x_0,$$

i važi $\lim\limits_{x \to x_0} \phi(x) = 1$.

Tada pišemo $f(x) \sim g(x)$ kada $x \to x_0$. Dovoljan uslov za asimptotsko ponašanje $f(x) \sim g(x)$ kada $x \to x_0$ jeste jednakost $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Definicija 4.9. *Kažemo da je funkcija f* **"malo o"** *funkcije g kada x teži x_0 ako postoji funkcija ϕ takva da je*

$$f(x) = \phi(x) \cdot g(x), \; x \in (a, b), \; x \neq x_0,$$

i važi $\lim\limits_{x \to x_0} \phi(x) = 0$.

Tada pišemo $f = o(g)$ kada $x \to x_0$. Ako $g(x) \neq 0$ za svako $x \neq x_0$, tada je potreban i dovoljan uslov za asimptotsku relaciju $f(x) = o(g(x))$ kada $x \to x_0$ jednakost $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Posebno, ako $g(x) \equiv 1$, tada $f(x) = o(1)$ kada $x \to x_0$ znači da funkcija f teži nuli kada $x \to x_0$.

Definicija 4.10. *Funkcija f je* **"veliko o"** *funkcije g kada x teži x_0 ako postoji konstanta $K > 0$ takva da je*

$$|f(x)| \leq K \cdot |g(x)|, \; x \in (a, b), \; x \neq x_0.$$

Tada pišemo $f(x) = O(g(x))$ kada $x \to x_0$. Posebno ako je $g(x) \equiv 1$, $x \in (a, b)$, tada $f(x) = O(1)$ kada $x \to x_0$. To znači da je, za neko $\delta > 0$, funkcija f je ograničena na skupu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

Asimptotska ponašanja se mogu takodje definisati i u sledećim slučajevima: $x \to x_0+$, $x \to x_0-$, $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$.

4.3.1 Zadaci

4.50. *Pokazati*

a) $e^x - 1 \sim \frac{1}{2} \sin 2x$, $x \to 0$; b) $\mathrm{sh} \sim x$, $x \to 0$;

c) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x \sim e^2$, $x \to +\infty$; d) $\ln(1 + 3^x) \sim \dfrac{\ln 3}{\ln 2} \ln(1 + 2^x)$, $x \to +\infty$.

Rešenja.

a) Iz $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}=1/2$, po definiciji 4.8 sledi $e^x-1\sim\dfrac{1}{2}\sin 2x,\ x\to 0$.

b) Sledi iz zadatka 4.43.

c) Sledi iz zadatka 4.37.

4.51. *Pokazati da važi* $f(x)\sim g(x),\ x\to 0$, *ako je*

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\mathbf{Q};\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\end{cases}\qquad i\qquad g(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbf{Q};\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\end{cases}$$

gde sa $\mathbf{Q}$ *označavamo skup racionalnih brojeva.*

Rešenje. Neka je $\psi(x)=\dfrac{\sin x}{x},\ x\neq 0$. Tada važi

$$f(x)=\psi(x)g(x)\quad\text{i}\quad\lim_{x\to 0}\psi(x)=1,$$

pa po definiciji 4.8 to znači da $f(x)\sim g(x)$, kada $x\to 0$.

Primedba. U slučaju f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *ne postoji.*

4.52. *Pokazati sledeće asimptotske relacije.*

a) $\dfrac{x^m}{1+x^n}\sim x^m,\ x\to 0$; b) $\dfrac{x^m}{1+x^n}\sim x^{m-n},\ x\to+\infty$;

c) $2-2\cos^b x\sim bx^2,\ x\to 0,\ b\neq 0$; d) $\arctan 2x\sim 2x,\ x\to 0$;

e) $x\to\arctan x\sim\dfrac{\pi}{2},\ x\to+\infty$; f) $\dfrac{1}{\cos^m x}\sim\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^m},\ x\to\dfrac{\pi}{2}$.

U ovom slučaju m i n su prirodni brojevi.

4.53. *Odrediti numeričke konstante a i b tako da* $f(x)\sim ax^b$, *kada* $x\to x_0$, *ako*

a) $f(x)=\sqrt{3x+\sqrt{x+\sqrt{x}}},\quad x_0=0$;

b) $f(x)=\sqrt{3x+\sqrt{x+\sqrt{x}}},\quad x_0=+\infty$;

c) $f(x)=5e^{x^4}+(\cos x-1)^2+x^6-5,\quad x_0=0$;

d) $f(x)=\sin^2 3x+x\to\arcsin^2 x+2x\to\arctan x^2,\quad x_0=0$.

Rezultati. a) $a=1,\ b=1/8$. b) $a=\sqrt{3},\ b=1/2$.
c) $a=21/4,\ b=4$. d) $a=12,\ b=2$.

4.54. *Odrediti sledeće granične vrednosti.*

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+2\arctan 2x+3x^2}{\ln(1+2x+\sin^2 x)+xe^x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\operatorname{tg} x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)-\ln\dfrac{x}{2}\right)$; d) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^3)^{\operatorname{ctg} x}$.

Rešenja.

a) Na osnovu sledećih asimptotskih ponašanja
$\sin 3x\sim 3x$, $\arctan 2x\sim 2x$, $xe^x\sim x$, $\ln(1+2x+\sin^2 x)\sim 2x+\sin^2 x\sim 2x$,
kada $x\to 0$, imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+2\arctan 2x+3x^2}{\ln(1+2x+\sin^2 x)+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{3x}=\frac{7}{3}.$$

b) Kako je $2\ln\cos x=\ln(1-\sin^2 x)\sim-\sin^2 x\sim-x^2$, $\operatorname{tg} x^2\sim x^2$ kada $x\to 0$, to imamo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\operatorname{tg} x^2}=\dfrac{-1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

c)
$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)-\ln\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{2}{x}+o\left(\frac{2}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)=2.$$

d) Na osnovu $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^3)^{\operatorname{ctg} x}=e^{\ell}$, gde je $\ell=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^3)}{\operatorname{tg} x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^3}{x}=0$, sledi $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^3)^{\operatorname{ctg} x}=1$.

4.55. *Pokazati sledeće relacije.*

a) $x^2\sin\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^7}+o(\sqrt[3]{x^7}),\ x\to 0$; b) $e^x-1=x+o(x),\ x\to 0$;

c) $\log_a x=o(x^c),\ a>1,\ c>0,\ x\to 0+$.

Rešenja.

a) Iz $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^7}} = 1$ i $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2\sin\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x^7}}{\sqrt[3]{x^7}}\right) = 0$, slede date asimptotske relacije.

4.56. *Odrediti sledeće granične vrednosti.*

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{x/(x+1)}-1\right)^{(x^2+1)/x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$, $a, b\neq 0$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos ax}{1+\sin x\cos bx}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

Rešenja.

a) Na osnovu $e^{x/(x+1)}-1 = \dfrac{x}{x+1}+o(x)$, $x\to 0$, i zadatka 4.35 možemo pisati

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(2e^{x/(x+1)}-1\right)^{(x^2+1)/x} &= \exp\left(\lim_{x\to 0} 2\left(e^{x/(x+1)}-1\right)\cdot\frac{x^2+1}{x}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0} 2\left(\frac{x}{x+1}+o(x)\right)\cdot\frac{x^2+1}{x}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0} 2\left(\frac{x^2+1}{x+1}+\frac{(x^2+1)o(x)}{x}\right)\right) = e^2.
\end{aligned}$$

b) Kako je $\ln(1+x) = x+o(x)$, $x\to 0$, to imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\dfrac{a^2x^2}{2}+o(x^2)\right)}{\ln\left(1-\dfrac{b^2x^2}{2}+o(x^2)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{a^2x^2}{2}+o(x^2)}{-\dfrac{b^2x^2}{2}+o(x^2)} = \frac{a^2}{b^2}.$$

c) Za $x\to 0$ važi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1+\sin x\cos ax}{1+\sin x\cos bx}-1\right)\cdot\operatorname{ctg}^3 x &= \frac{\cos ax-\cos bx}{1+\sin x\cos bx}\cdot\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\\
&= \frac{\left(\dfrac{b^2-a^2}{2}x^2+o(x^2)\right)}{1+(x+o(x))\cdot\left(1-\dfrac{b^2x^2}{2}+o(x^2)\right)}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^3}{(x^2+o(x^2))}\\
&= \frac{\dfrac{b^2-a^2}{2}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}.
\end{aligned}$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos ax}{1+\sin x\cos bx}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}\\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0}\operatorname{ctg}^3 x\cdot\left(\frac{1+\sin x\cos ax}{1+\sin x\cos bx}-1\right)\right) = \exp\left((b^2-a^2)/2\right).
\end{aligned}$$

4.57. *Da li su sledeće asimptotske relacije korektne?*

a) $1997x+x\cos x = O(x)$, $x\to +\infty$; b) $x = O(1997x+x\cos x)$, $x\to +\infty$;

c) $x = O(x+x\cos x)$, $x\to +\infty$; d) $\sqrt{x^2+3}-x = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x\to +\infty$.

Rešenja.

a) Kako je $|1997x+x\cos x|\leq C|x|$, $x\in\mathrm{R}$, (na primer za $x\geq 1$ možemo pisati $C = 1998$), sledi da je dato tvrdjenje tačno.

b) Tvrdjenje je tačno, jer za $x\geq 1$ važi

$$|x|\leq|x+(1996+\cos x)x| = 1\cdot|1997x+x\cos x|.$$

c) Tvrdjenje *nije* tačno, jer je za svako $x_0 > 0$ i za svako $C > 0$, postoji $x_1 > x_0$ takvo da važi

$$1+\cos x_1 < \frac{1}{C}\quad\text{ili}\quad x_1 > C(x_1+x_1\cos x_1).$$

d) Tvrdjenje je tačno, jer je $|\sqrt{x^2+3}-x| < 3\cdot\dfrac{1}{x}$, $x\geq 1$.

4.58. *Pokazati*

a) $1-\cos x = \dfrac{x^2}{2}+o(x)$, $x\to 0$; b) $a^x-1 = x\ln a+o(x\ln a)$, $x\to 0$;

c) $x+x\cos x = O(x)$, $x\to 0$; d) $\dfrac{1}{x} = O\left(\sqrt{x^2+1}-|x|\right)$, $x\to +\infty$.

4.59. *Naka je f pozitivna funkcija u nekoj okolini tačke x_0. Pokazati sledeće asimptotske relacije kada $x\to x_0$.*

a) $O(O(f)) = O(f)$; b) $O(o(f)) = o(f)$; c) $o(f)+O(f) = O(f)$.

Rešenja.

a) Neka je $g = O(f)$ i $h = O(g)$. Tada po definiciji 4.10 postoje konstante $K_1 > 0$ i $K_2 > 0$ takve da u nekoj okolini U od x_0 važi za $x \neq x_0$

$$|g(x)| \le K_1 f(x) \quad \text{i} \quad |h(x)| \le K_2 g(x)$$

Tada na skupu $U \setminus \{x_0\}$ važi $|h(x)| \le K_2 K_1 f(x)$, odakle sledi tvrdjenje.

c) Neka je $g = o(f)$ i $h = O(f)$. Tada po definiciji 4.9 i 4.10 postoji funkcija ϕ, konstanta $K > 0$ i okolina U od x_0 takva

$$g(x) = \phi(x) f(x), \quad \lim_{x \to x_0} \phi(x) = 0 \quad \text{i} \quad |h(x)| \le K f(x), \quad x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Tada se suma funkcija g i h na skupu $U \setminus \{x_0\}$ može pisati kao

$$g(x) + h(x) = \phi(x) f(x) + h(x).$$

Kako $\phi(x)$ teži nuli kada $x \to x_0$, tada postoji okolina $U_1 \subset U$ tačke x_0, takva da na skupu $U_1 \setminus \{x_0\}$ važi $|\phi(x)| \le 1$. Tako je

$$(\forall x \in U_1 \setminus \{x_0\}) \quad |g(x) + h(x)| \le 1 \cdot f(x) + K \cdot f(x) \le K_1 f(x)$$

za $K_1 := 1 + K$.

4.60. *Pokazati da ako funkcije f i g imaju osobinu $f(x) \neq 0$ i $g(x) \neq 0$ za $x \neq x_0$, tada kada $x \to x_0$ važi*

$$f(x) \sim g(x) \iff g(x) - f(x) = o(g).$$

Rešenje. Iz jednakosti $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ sledi $\lim_{x \to x_0} \left(1 - \frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$, tako da dobijamo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = 0, \quad \text{što znači} \quad g(x) - f(x) = o(g), \quad x \to x_0.$$

4.61. *Neka je $f(x) \sim f_1(x)$ i $g(x) \sim g_1(x)$, kada $x \to x_0$. Ako tada postoji $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, tada postoji $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ koji zadovoljava*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

Pokazati.

Rešenje. Na osnovu $f(x) = f_1(x) + o(f_1(x))$ i $g(x) = g_1(x) + o(g_1(x))$ kada $x \to x_0$ možemo pisati

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1 + \dfrac{o(f_1(x))}{f_1(x)}}{1 + \dfrac{o(g_1(x))}{g_1(x)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Glava 5

Neprekidnost funkcije

5.1 Neprekidnost funkcije u tački

Definicija 5.1. *Funkcija $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je* **neprekidna u tački** $x_0 \in A$ *ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$, koji zavisi od ε i od tačke x_0, takav da za svako $x \in A$ sa osobinom $|x - x_0| < \delta$ važi nejednakost $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

Pomoću logičkih simbola, definicija neprekidnosti funkcije u tački se može zapisati na sledeći način:

Funkcija $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **neprekidna u tački** $x_0 \in A$ *ako i samo ako*

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in A) \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{5.1}$$

Ako je tačka $x_0 \in A$ tačka nagomilavanja skupa A, tada se mogu koristiti i sledeće dve, medjusobno ekvivalentne, definicije.

Definicija 5.2. *Funkcija $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je* **neprekidna u tački** $x_0 \in A$, *gde je x_0 tačka nagomilavanja domena A, ako važi*

$$\lim_{x \to x_0,\, x \in A} f(x) = f(x_0).$$

Definicija 5.3. *Funkcija $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je* **neprekidna u tački** $x_0 \in A$, *gde je x_0 tačka nagomilavanja domena A, ako za svaki niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sa elementima iz A koji konvergira ka x_0 važi*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Definicija 5.4. *Pretpostavimo da domen funkcije f sadrži interval $(a, x_0]$ (resp. $[x_0, b)$). Funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ je* **neprekidna sa leve strane** *(resp.*

sa desne strane*)* u tački x_0 *ako je*

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0) \qquad (\textit{resp.} \quad \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)).$$

Teorema 5.1. *Funkcija* $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ *je neprekidna u tački* $x_0\in(a,b)$ *ako i samo ako važe sledeća tri uslova:*

1. *postoje leva i desna granična vrednost funkcije* f *u tački* x_0,
2. *postoji granična vrednost funkcije* f *u tački* x_0,
3. *važe jednakosti* $\displaystyle\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Definicija 5.5. *Funkcija* $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ *ima* **prekid u tački** $x_0\in(a,b)$ *ako nije neprekidna u tački* x_0.

U skladu sa teoremom 5.1 možemo klasifikovati tačno tri vrste prekida funkcija.

1. Ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ i jednak je nekom broju $L\neq f(x_0)$, tada f ima **otklonjiv prekid u tački** x_0.
2. Ako postoje i leva i desna granična vrednost funkcije u tački x_0
$$L_1 := \lim_{x\to x_0-} f(x) \quad \text{i} \quad L_2 := \lim_{x\to x_0+} f(x), \tag{5.2}$$
ali one nisu jednake, tj. $L_1\neq L_2$, tada funkcija f ima **prekid prve vrste u tački** x_0.
3. Ako bar jedna od graničnih vrednosti u (5.2) ne postoji, tada funkcija f ima **prekid druge vrste u tački** x_0.

Funkcija $f:A\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ je **neprekidna na skupu** $B\subset A$ ako je neprekidna u svakoj tački skupa B.

Ako su funkcije $f:A_1\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ i $g:A_2\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ neprekidne u tački $x_0\in A_1\cap A_2$ (resp. na skupu $B\subset A_1\cap A_2$), tada su sledeće funkcije takodj neprekidne u tački $x_0\in A_1\cap A_2$ (resp. na skupu $B\subset A_1\cap A_2$):

- $f+g$ (**zbir** f i g),
- $f\cdot g$ (**proizvod** f i g),
- $\dfrac{f}{g}$ (**količnik** f i g), naravno, uz dodatni uslov $g(x_0)\neq 0$ (resp. kada je $g(x)\neq 0$ za svako $x\in B$).

Pretpostavimo da je funkcija $g:A\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ neprekidna u tački $x_0\in A$ i da je funkcija $f:B\to\mathbf{R}$ neprekidna u tački $g(x_0)$, pri čemu je $g(A)\subset B$. Tada je **složena funkcija** $h:A\to\mathbf{R}$, data sa $h=f\circ g$, takodje **neprekidna u tački** x_0.

5.1.1 Zadaci

5.1. *Na osnovu definicije 5.1, proveriti neprekidnost sledećih funkcija u proizvoljnoj tački* x_0 *njihovog domena:*

a) $f(x)=3x+5,\ x\in\mathbf{R}$; b) $f(x)=x^3,\ x\in\mathbf{R}$;

c) $f(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,+\infty)$; d) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x\in\mathbf{R}$;

e) $f(x)=\operatorname{arctg}x,\ x\in\mathbf{R}$; f) $f(x)=\operatorname{arcctg}x,\ x\in\mathbf{R}$.

Rešenja.

a) Uzmimo proizvoljnu tačku $x_0\in\mathbf{R}$ i neka je dato $\varepsilon>0$. Iz nejednakosti

$$|f(x)-f(x_0)| = 3|x-x_0| < 3\delta, \quad x\in\mathbf{R},$$

sledi da možemo izabrati $\delta:=\varepsilon/3$ takav da važi implikacija (5.1), tj.

$$(\forall x\in\mathbf{R}) \quad |x-x_0|<\delta=\varepsilon/3 \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

b) Neka je $x_0\in\mathbf{R}$ i neka je dato $\varepsilon>0$. Tada važi

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| = |x^3-x_0^3| &= \left|(x-x_0)^2+(x^2+xx_0+x_0^2)\right| \\ &\leq |x-x_0|\cdot\left(|x|^2+|x|\,|x_0||x_0|^2\right).\end{aligned}$$

Za $|x-x_0|<\delta$ i $\delta<1$ je $|x-x_0|<1$, pa je $|x|\leq|x_0|+1$, što povlači

$$|f(x)-f(x_0)| < \delta\left((|x_0|+1)^2+(|x_0|+1)|x_0|2\right) = \delta\left(3|x_0|^2+3|x_0|+1\right).$$

Ako stavimo $\displaystyle\delta:=\frac{1}{2}\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{3|x_0|^2+3|x_0|+1}\right\}$, tada važi

$$(\forall x\in\mathbf{R}) \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Primedba. Broj δ iz definicije 5.1 (pa i iz poslednjeg primera) nije jednoznačno odredjen. Naime, ako za dato ε odredimo $\delta>0$ takvo da za svako $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ važi $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, tada i za svako drugo δ_1 sa osobinom $0<\delta_1<\delta$, važi

$$|x-x_0|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Dakle, važno je samo da za dato $\varepsilon>0$ **postoji** bar jedno $\delta>0$ sa osobinom da važi implikacija iz (5.1).

c) Neka $x_0>0$ fiksirano i neka je dato $\varepsilon>0$. Iz relacije

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| = \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} < \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}},$$

pod pretpostavkom da je $|x - x_0| < \delta$, sledi

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\delta}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon.$$

Znači možemo odrediti $\delta := \varepsilon\sqrt{x_0}$, tako da važi implikacija (5.1).

Slučaj $x_0 = 0$ se ostavlja čitaocu.

d) Neka je $x_0 > 0$; slučaj $x_0 = 0$, je jednostavniji i ostavljamo ga čitaocu.

Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Ako je $|x - x_0| < \delta$, tada važi

$$\begin{aligned} |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| &= \frac{|x - x_0|}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} \\ &= \frac{|x - x_0|}{\left(\sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt[3]{x_0}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}} < \frac{\delta}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}}. \end{aligned}$$

Znači δ se može odrediti kao $\delta := \varepsilon \cdot \frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}$.

e) Neka je dato $\varepsilon > 0$ i uzmimo prvo da je $x_0 = 0$. Tada za svako $x \in \mathbf{R}$ važi

$$|f(x) - f(0)| = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0| = |\operatorname{arctg} x| \le |x|.$$

Ako izaberemo $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$, tada sledi

$$|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

Pretpostavimo sada da je $x_0 \neq 0$ i neka je $h = x - x_0$. U nastavku ćemo birati h dovoljno malo da je $|h| < |x_0|$, što znači da x i x_0 istog znaka.

Stavimo $t = \operatorname{arctg}(x_0 + h) - \operatorname{arctg} x_0$, tj. $\operatorname{tg} t = \frac{h}{1 + x_0^2 + x_0 h}$

Kako je $|t| \le |\operatorname{tg} t|$ za sve $t \in \mathbf{R}$ sa osobinom $|t| < \pi/2$. Na osnovu prethodnog je

$$\begin{aligned} |\operatorname{arctg}(x_0 + h) - \operatorname{arctg} x_0| &= |t| \le \operatorname{tg} t = \frac{|h|}{|1 + x_0^2 + x_0 h|} \\ &= \frac{|h|}{|(1 + x_0^2) - (-hx)|} < \frac{|h|}{1 + x_0^2 - |h|\,|x|} < \varepsilon, \end{aligned}$$

pod uslovom da je $|h| = |x - x_0| < \dfrac{(1 + x_0^2)\varepsilon}{1 + |x_0|\varepsilon} = \delta$.

5.2. *Proveriti neprekidnost sledećih funkcija u proizvoljnoj tački x_0 njihovog domena:*

a) $f(x) = \sin x, \quad x \in \mathbf{R}$; b) $f(x) = \cos x, \quad x \in \mathbf{R}$;

c) $f(x) = \arcsin x, \quad x \in [-1, 1]$; d) $f(x) = \arccos x, \quad x \in [-1, 1]$;

e) $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2 \,|\, k \in \mathbf{Z}\}$;

f) $f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi \,|\, k \in \mathbf{Z}\}$.

5.3. *Proveriti neprekidnost sledećih funkcija u proizvoljnoj tački x_0 njihovog domena:*

a) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$; b) $f(x) = a^x$, $x \in \mathbf{R}$, $a > 0$;

c) $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$; d) $f(x) = \log_a x$, $x \in (0, +\infty)$, $a > 0$;

e) $f(x) = \operatorname{sh} x$, $x \in \mathbf{R}$; f) $f(x) = \operatorname{ch} x$, $x \in \mathbf{R}$;

g) $f(x) = \operatorname{tgh} x$, $x \in \mathbf{R}$; h) $f(x) = \operatorname{ctgh} x$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

5.4. *Proveriti neprekidnost sledećih složenih funkcija u proizvoljnoj tački x_0 njihovih domena:*

a) $f(x) = \sin(ax + b), \quad x \in \mathbf{R}$; b) $f(x) = x^2 + x + 3, \quad x \in \mathbf{R}$;

c) $f(x) = x^3 + \cos x, \quad x \in \mathbf{R}$; d) $f(x) = \sqrt[5]{x}\sin 5x, \quad x \in \mathbf{R}$;

e) $f(x) = x \operatorname{ctg} x, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi \,|\, k \in \mathbf{Z}\}$; f) $f(x) = \dfrac{2 - 2\cos x}{x^2}, \quad x \neq 0$.

5.5. *Na osnovu definicije 5.1, proveriti neprekidnost sledećih funkcija u proizvoljnoj tački x_0 njihovog domena.*

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0; \\ -1, & x = 0; \end{cases}$ b) $D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{I} := \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}; \\ 1, & x \in \mathbf{Q}. \end{cases}$

Ovde **Q** *i* **I** *označavaju označavaju, medjusobno disjunktne, skupove racionalnih i iracionalnih brojeva. Njihova unija je skup* **R**.

Rešenja.

a) Iz definicije apsolutne vrednosti sledi $f(x) = 1$ ako je $x > 0$, i $f(x) = -1$ ako je $x \le 0$. Pokažimo prvo da je funkcija f neprekidna u svakoj tački

$x_0 \neq 0$. Ako je $|x - x_0| < \frac{1}{2}|x_0|$, to su x i x_0 istog znaka. Tada je

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{x}{|x|} - \frac{x_0}{|x_0|}\right| = 0.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ dato i stavimo $\delta = \frac{|x_0|}{2}$. Tada važi sledeća implikacija:

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pokažimo da funkcija f ima prekid u tački $x_0 = 0$. Kako je

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = -1 \neq f(0),$$

funkcija f je neprekidna u nuli sa leve strane, ali *nije neprekidna* u toj tački. U stvari, funkcija f ima prekid prve vrste u nuli.

b) Za datu funkciju, zvanu *Dirihleova funkcija*, je u u zadatku 4.5 pokazano da nema granuičnu vrednost ni u jednom realnom broju, pa je zato prekidna u svakoj tački $x_0 \in \mathbf{R}$. Sada ćemo to dokazati na drugi način. Neka je $x_0 \in \mathbf{Q}$. (Drugi slučaj, odnosno $x_0 \in \mathbf{I}$, se dokazuje slično.)

Pokazaćemo da postoji $\varepsilon > 0$ takvo da za svako $\delta > 0$ postoji $x \in \mathbf{R}$ (x zavisi od δ) sa osobinom

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |D(x) - D(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Uzmimo $\varepsilon := 1/2$. Tada za svako $\delta > 0$ postoji iracionalan broj x_δ takav da je $|x_\delta - x_0| < \delta$. Tada važi

$$|D(x_\delta) - D(x_0)| = |0 - 1| = 1 > 1/2.$$

Koristili smo činjenicu da je skup $\mathbf{I}$ iracionalnih brojeva gust u skupu racionalnih brojeva, tj. u svakoj okolini racionalnog broja x_0 postoji bar jedan iracionalan broj.

Ustvari, u proizvoljnoj okolini broja $x_0 \in \mathbf{Q}$ postoji beskonačno mnogo iracionalnih brojeva.

5.6. *Pokazati da je funkcija f prekidna za svako $x \in \mathbf{R}$, ako je*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbf{Q}; \\ 1, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

5.7.. *Ako je funkcija f prekidna u svakoj tački $x_0 \in \mathbf{R}$, da li to tada važi i za funkciju f^2?*

Rezultat. Ne obavezno. (Videti prethodni zadatak.)

5.8. *Pretpostavimo da funkcija $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ ima sledeću osobinu u tački $x_0 \in (a, b)$:*

a) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in (a, b)) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta;$

b) $(\forall \delta > 0)\,(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall x \in (a, b)) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \delta;$

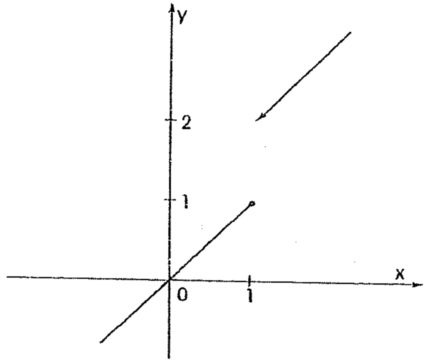
c) $(\forall \delta > 0)\,(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall x \in (a, b)) \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$

Šta se može reći o neprekidnosti funckcije f u tački x_0?

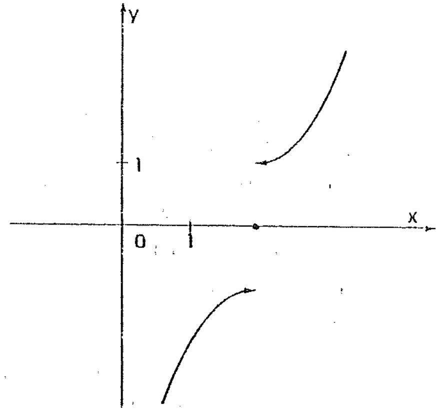
Rešenja. Odredićemo tri funkcije koje redom zadovoljavaju date implikacije u a), b) i c) respektivno, ali niti jedna od njih neće biti neprekidna u tački x_0. To pokazuje da su u definiciji 5.1 bitni kako redosled kvantifikatora tako i smer implikacije.

a) Posmatrajmo funkciju f datu sa (slika 5.1):

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1; \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$$



Slika 5.1.



Slika 5.2.

Očevidno je da je ova funkcija neprekidna na skupu $\mathbf{R} \setminus \{1\}$, i da ima prekid prve vrste u tački $x_0 = 1$. Medjutim, pokazaćemo da data funkcija u tački $x_0 = 1$ zadovoljava navedeni uslov pod a). U tom cilju, za $\varepsilon > 1$ stavimo $\delta := \varepsilon - 1$. Tada za svako $x \in \mathbf{R}$ važi

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \delta. \tag{5.3}$$

Ako je $\varepsilon \le 1$, stavimo $\delta := \varepsilon$. Tada je skup x-ova većih od 1 za koje važi nejednakost $|f(x)-f(1)| < \varepsilon$ prazan, pa je implikacija (5.3) tačna. Za $x < 1$ važi

$$|f(x)-f(1)| < \varepsilon \iff |x-1| < \varepsilon.$$

b) Funkcija f data sa

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x \ne 0;\\ 1, & x = 0,\end{cases}$$

ima osobinu b) u svakoj tački $x_0 \in \mathbb{R}$. Pokazaćemo to samo u tački $x_0 = 0$, u kojoj f ima otklonjiv prekid. (Zašto?)

Za dato $\delta > 0$ izaberimo $\varepsilon > 0$ tako da je $1 < \varepsilon < 1+\delta^2$ (na primer, $\varepsilon := 1 + \frac{\delta^2}{2}$). Tada za svako $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ važi

$$(|f(x)-f(0)| = |x^2-1| < x^2+1 < \varepsilon)$$

$$\Rightarrow (|x-0| = \sqrt{|x|^2+1-1} < \sqrt{\varepsilon-1} < \delta).$$

c) Neka je funkcija f data sa

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+5, & x > 2;\\ 0, & x = 2;\\ -x^2+4x-5, & x < 2\end{cases}$$

(slika 5.2). Data funkcija ima prekid prvog reda u tački $x_0 = 2$, i neprekidna je na skupu $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Pokazaćemo da f zadovoljava dati uslov u tački $x_0 = 2$. Naime, za dato $\delta > 0$ stavimo $\varepsilon := 1+\delta^2$. Tada za svako $x \in \mathbb{R}$ važi

$$(|x-2| < \delta) \Rightarrow (|f(x)-f(2)| = 1+(x-2)^2 < 1+\delta^2 = \varepsilon).$$

Primetimo da uslov c) daje samo ograničenost funkcije f u nekoj okolini tačke x_0.

5.9. *Pokazati da ako je funkcija* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *neprekidna u tački* $x_0 \in (a,b)$ *i važi* $f(x_0) \ne 0$, *tada postoji* $\delta > 0$ *sa osobinom*

a) $(\forall x \in (a,b))\ \ |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2}$, *ako je* $f(x_0) > 0$;

b) $(\forall x \in (a,b))\ \ |x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < \dfrac{f(x_0)}{2}$, *ako je* $f(x_0) < 0$.

Rešenje. Pokazaćemo samo slučaj pod a). U tom cilju, pretpostavimo da je $f(x_0) > 0$. Na osnovu definicije neprekidnosti f u x_0, za $\varepsilon := \dfrac{f(x_0)}{2}$ postoji $\delta > 0$ tako da važi implikacija

$$(\forall x \in (a,b))\ \ |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}.$$

Dakle za sve $x \in (a,b)$ sa osobinom $x_0-\delta < x < x_0+\delta$ važi

$$\left(-\frac{f(x_0)}{2} < f(x)-f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}\right) \Rightarrow \left(\frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}\right).$$

Primedba. Zadatak 5.9 daje sledeću važnu osobinu neprekidnih funkcija u tački x_0 u kojoj je $f(x_0) \ne 0$. Naime, tada postoji interval $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ na kome je funkcija f istog znaka kao i broj $f(x_0)$.

5.10. *Ispitati neprekidnost sledećih funkcija u tački* 0 :

a) $f(x)=\begin{cases} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x \ne 0;\\ 1, & x = 0;\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x \ne 0;\\ 1, & x = 0;\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \ne 0;\\ C, & x = 0;\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \ne 0;\\ 0, & x = 0.\end{cases}$

U zadatku pod c), C označava neki realan broj. Predlažemo čitaocu da pokaže neprekidnost ovih funkcija na skupu $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Rešenja.

a) Pokažimo da je f neprekidna u tački 0. Na osnovu granične vrednosti $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ imamo

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{i}$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \lim_{x\to 0-}\frac{-\sin x}{-x} = 1.$$

Pošto je i $f(0) = 1$, iz teoreme 5.1 sledi da je f neprekidna u 0.

b) Pošto je

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{i}$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x\to 0-}\frac{\sin x}{-x} = -1,$$

to data funkcija ima prekid prve vrste u tački 0.

c) Pokazaćemo da u ovom slučaju f nema graničnu vrednost u 0. Ako je $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathrm{N}$ i $x'_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$, $n \in \mathrm{N}$, tada važi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$. Medjutim, pošto je

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(n\pi) = 0 \quad \text{i}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

to na osnovu definicije 5.2 sledi da f nema graničnu vrednost u 0. Dakle, na osnovu teoreme 5.5 sledi da, nezavisno od izbora broja C, funkcija f ima prekid druge vrste u 0.

d) Pokazaćemo da je f neprekidna u 0. Za dato $\varepsilon > 0$ izaberimo $\delta := \varepsilon$. Tada za svako $x \in \mathbf{R}$ sa osobinom $0 < |x - 0| < \delta$ važi

$$|f(x) - f(0)| = |x \sin\frac{1}{x} - 0| \leq |x| = |x - 0| < \delta = \varepsilon.$$

Dakle $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$, i iz teoreme 5.5 sledi neprekidnost f u 0 (videti sliku 2.4).

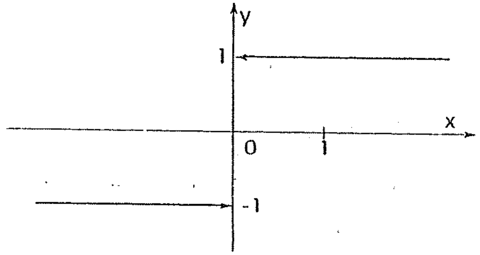
5.11. *Odrediti tačke prekida i njihovu vrstu za sledeće funkcije:*

a) $\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0; \end{cases}$ b) $f(x) = \operatorname{sgn}^2 x, \quad x \in \mathbf{R}.$

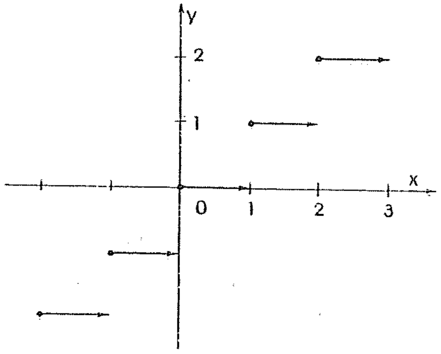
Rešenja.

a) Pošto je $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$ i $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$, to f ima prekid prve vrste u 0 (slika 5.3).

b) Pošto je $\operatorname{sgn}^2 x = 1$ za $x \neq 0$, to sledi da f ima otklonjiv prekid u 0.



Slika 5.3.



Slika 5.4.

5.12. *Odrediti tačke prekida i njihovu vrstu za sledeće funkcije:*

a) $f(x) = [x], \quad x \in \mathbf{R}$; b) $f(x) = ax + b[x], \quad x \in \mathbf{R},\ b \neq 0$;

c) $f(x) = x[x], \quad x \in \mathbf{R}$; d) $f(x) = [x] \cdot \sin(\pi x), \quad x \in \mathbf{R}$.

Rešenja. Očevidno su sve četiri ove funkcije neprekidne na skupu $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Ispitajmo zato šta se dešava u celim brojevima.

a) Iz definicije funkcije $f(x) = [x]$, tj. one koja dodeljuje svakom realnom broju x najveći ceo broj koji nije veći od x, sledi da f ima prekid prve vrste u svakom celom broju k (slika 5.4).

b) Odredimo levu i desnu graničnu vrednost funkcije f u proizvoljnom celom broju k :

$$\lim_{x\to k+} (ax + b[x]) = ak + bk = (a+b)k \quad \text{i}$$

$$\lim_{x\to k-} (ax + b[x]) = ak + b(k-1) = (a+b)k - b.$$

Pošto važi $b \neq 0$, to sledi da f ima prekide prve vrste u svakoj tački $k \in \mathbf{Z}$.

c) U tački $x_0 = 0$ funkcija f je neprekidna jer je $f(0) = 0$, i važi

$$\lim_{x\to 0+} x[x] = \lim_{x\to 0+} x \cdot \lim_{x\to 0+} [x] = 0 \cdot 0 = 0 \qquad \text{i}$$

$$\lim_{x\to 0-} x[x] = \lim_{x\to 0-} x \cdot \lim_{x\to 0-} [x] = 0 \cdot (-1) = 0.$$

Ako je $k \in \mathrm{Z} \setminus \{0\}$, tada je

$$\lim_{x\to k+} x[x] = \lim_{x\to k+} x \cdot \lim_{x\to k+} [x] = k \cdot k = k^2 \qquad \text{i}$$

$$\lim_{x\to k-} x[x] = \lim_{x\to k-} x \cdot \lim_{x\to k-} [x] = k \cdot (k-1) = k^2 - k.$$

Dakle, data funkcija ima prekide prve vrste u svakoj tački skupa $\mathrm{Z}\setminus\{0\}$.

d) Leva i desna granična vrednost funkcije f u tački $k \in \mathrm{Z}$ su jednake nuli, jer je

$$\lim_{x\to k+} [x] \cdot \sin(\pi x) = k \lim_{x\to k+} \sin(\pi x) = 0 \qquad \text{i}$$

$$\lim_{x\to k-} [x] \cdot \sin(\pi x) = (k-1) \lim_{x\to k-} \sin(\pi x) = 0.$$

Pošto je i $f(k) = 0$, iz teoreme 5.5 sledi da je f neprekidna i na skupu Z.

5.13. *Odrediti tačke prekida i njihovu vrstu za sledeće funkcije:*

a) $$f(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{x}\right], & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$ b) $$f(x) = \begin{cases} x \cdot \left[\dfrac{1}{x}\right], & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

c) $$f(x) = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{x^2}\right] \cdot \operatorname{sgn}\left(\sin(\dfrac{1}{x^2})\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Rešenja.

a) Na osnovu smene $x = 1/t$ i $t = [t] + r(t)$, gde je $0 \le r(t) < 1$, sledi

$$\lim_{x\to 0+} \left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{t\to +\infty} (t - r(t)) = +\infty.$$

Analogno je $\lim\limits_{x\to 0-} [1/x] = -\infty$. To znači da f ima prekid druge vrste u 0.

Neka je $x \neq 0$. Tada, ako stavimo $x = 1/t$, dobijamo da f ima prekide prve vrste u tačkama $1/k$, $k \in \mathrm{Z}$.

b) Pošto je $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot [1/x] = 1$, funkcija f ima otklonjiv prekid u 0. U tački $x = 1/k$, $k \in \mathrm{Z} \setminus \{0\}$, važi

$$\lim_{x\to 1/k+} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0+} (\frac{1}{k} + \varepsilon) \cdot \left[\frac{1}{1/k + \varepsilon}\right] = \frac{1}{k} \cdot \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[\frac{k}{1 + k\varepsilon}\right] = \frac{k-1}{k}.$$

Slično se pokazuje da je $\lim\limits_{x\to 1/k-} x \cdot [1/x] = \dfrac{1}{k} \cdot k = 1$. Dakle, f ima prekide prvog reda u tačkama $1/k$, $k \in \mathrm{Z} \setminus \{0\}$.

c) Ispitajmo prvo neprekidnost funkcije f u 0. U tom cilju, krenimo od dva niza koji konvergiraju ka 0:

$$x_n = \sqrt{\frac{2}{\pi(1+4n)}}, \quad n \in \mathrm{N}, \qquad \text{i} \qquad x'_n = \sqrt{\frac{2}{\pi(3+4n)}}, \quad n \in \mathrm{N}.$$

Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = -\infty$. Dakle, f nema ni levu ni desnu graničnu vrednost u nuli, pa f ima prekid druge vrste u 0.

Ostaje nam da ispitamo tačke $\pm\dfrac{1}{\sqrt{|k|}}$, $k \in \mathrm{Z} \setminus \{0\}$; pokazaćemo da f ima prekide prvog reda u tim tačkama. U tom cilju, odredimo leve i desne granične vrednosti funkcije f u tačkama $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$, $k \in \mathrm{N}$ (ostali slučajevi su analogni):

$$\lim_{x\to 1/\sqrt{k}+} \left[\frac{1}{x^2}\right] \cdot \operatorname{sgn}\left(\sin(\frac{1}{x^2})\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[\frac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} + \varepsilon\right)^2}\right] \cdot \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} + \varepsilon\right)^2}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[\frac{k}{(1+\varepsilon\sqrt{k})^2}\right] \cdot \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{k}{(1+\varepsilon\sqrt{k})^2}\right) = (k-1) \cdot \operatorname{sgn}(\sin k),$$

$$\lim_{x\to 1/\sqrt{k}-} \left[\frac{1}{x^2}\right] \cdot \operatorname{sgn}\left(\sin(\frac{1}{x^2})\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[\frac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \varepsilon\right)^2}\right] \cdot \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{1}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \varepsilon\right)^2}\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[\frac{k}{(1-\varepsilon\sqrt{k})^2}\right] \cdot \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{k}{(1-\varepsilon\sqrt{k})^2}\right) = k \cdot \operatorname{sgn}(\sin k).$$

Pošto su leva i desna granična vrednost funkcije f u tački $\frac{1}{\sqrt{k}}$, $k \in \mathbb{N}$, različite, f ima prekide prvog reda u tačkama $\frac{1}{\sqrt{k}}$, $k \in \mathbb{N}$.

5.14. *Ako je moguće, odrediti konstantu C tako da funkcija f bude neprekidna u tački x_0, ako je*

a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x| - x}{x^2}, & x \neq 0; \\ C, & x = 0, \end{cases} \qquad x_0 = 0;$$

b) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1}, & x \neq -1; \\ C, & x = -1, \end{cases} \qquad x_0 = -1;$$

c) $$f(x) = \begin{cases} \exp\left(x + \dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ C, & x = 0, \end{cases} \qquad x_0 = 0;$$

d) $$f(x) = \begin{cases} \cos^2(1/x), & x \neq 0; \\ C, & x = 0, \end{cases} \qquad x_0 = 0;$$

e) $$f(x) = \begin{cases} x \ln x^2, & x \neq 0; \\ C, & x = 0; \end{cases} \qquad x_0 = 0.$$

Rešenja.

a) Funkcija f se može zapisati kao

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x > 0; \\ -\dfrac{2}{x}, & x < 0; \\ C, & x = 0. \end{cases}$$

Dakle važi $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$, što znači da f ima prekid druge vrste u tački 0, nezavisno od vrednosti broja C. Specijalno je za $C = 0$ funkcija f neprekidna sa desne strane, jer je tada $f(0) = \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$.

b) Pošto je funkcija f jednaka

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1; \\ 1, & x > -1; \\ C, & x = -1, \end{cases}$$

ona ima prekid prve vrste u tački $x_0 = -1$. Za $C = -1$, f je neprekidna sa leve strane, dok je za $C = 1$ neprekidna sa desne strane.

c) Pošto važi sledeće jednakosti:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \exp\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \exp\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty,$$

to funkcija f ima prekid druge vrste u tački 0. Za $C = 0$, funkcija f je neprekidna sa leve strane u 0.

d) Pošto granica funkcije $f(x) = \cos^2(1/x^2)$, $x \neq 0$, u tački 0 ne postoji, f ima prekid druge vrste u 0. Ustvari, ni za jednu vrednost C funkcija f ne može biti neprekidna sa bilo koje strane u 0.

e) Kako je

$$\lim_{x \to 0} x \ln x^2 = \lim_{x \to 0} 2x \ln|x| = -\lim_{t \to +\infty} \frac{2 \ln t}{t} = 0,$$

pa je f neprekidna u 0 ako je $C = 0$, odnosno ima otklonjiv prekid u 0 ako je $C \neq 0$.

5.15. *Odrediti konstantu C, ako je moguće, tako da funkcija f bude neprekidna u datoj tački x_0, ako je:*

a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x^2-9}, & x \neq 3; \\ C, & x = 3, \end{cases} \qquad x_0 = 3;$$

b) $$f(x) = \begin{cases} Cx^3 + 3, & x \geq 0; \\ x^2, & x < 0, \end{cases} \qquad x_0 = 0;$$

c) $$f(x) = \begin{cases} 4\cos 2x, & x \leq \dfrac{\pi}{2}; \\ C(x^2+3), & x > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad x_0 = \frac{\pi}{2};$$

d) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x-2)}, & x > 2; \\ C + 3, & x \leq 2, \end{cases} \qquad x_0 = 2.$$

Rezultati.

a) Data funkcija je neprekidna u tački $x_0 = 3$ ako je $C = \frac{1}{6}$.

b) Data funkcija ima prekid prve vrste u tački $x_0 = 0$, i ni za jednu vrednost konstante C ne može biti neprekidna u toj tački.

c) Data funkcija je neprekidna u tački $x_0 = \pi/2$ ako je $C = 0$.

d) Data funkcija je neprekidna u tački $x_0 = 2$ ako je $C = -3$.

5.16. *Ako je moguće, odrediti konstante a, b i c, tako da sledeće funkcije budu neprekidne na njihovim domenima:*

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & |x| \le 1; \\ x^2 + ax + b, & |x| > 1; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{x^2-4}, & x \notin \{-2, 2\}; \\ a, & x = -2; \\ b, & x = 2; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}}, & x \notin \{-1, 0, 1\}; \\ a, & x = -1; \\ b, & x = 0; \\ c, & x = 1; \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sin x}, & x \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}; \\ a, & x = 0; \\ b, & x = \pi. \end{cases}$

Rešenja.

a) Pošto je

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} 2x = -2, \qquad \lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} (x^2+ax+b) = 1+a+b,$$
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} 2x = 2, \qquad \lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to -1-} (x^2+ax+b) = 1-a+b,$$

to je funkcija f neprekidna na $\mathbf{R}$ samo ako je

$$2 = 1 + a + b \quad \text{i} \quad -2 = 1 - a + b.$$

Dakle, treba uzeti $a = 2$ i $b = -1$.

b) Pošto je $\lim\limits_{x\to -2+} f(x) = -\infty$, funkcija f ima prekid druge vrste u $x = -2$, nezavisno od izbora broja a. Medjutim, pošto je

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = 0,$$

f je neprekidna u tački 2 ako je $b = 0$.

c) Pre svega, važe jednakosti:

$$\lim_{x\to -1-} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = -1, \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = 0.$$

Iz njih sledi da f ima prekid druge vrste u $x = -1$, nezavisno od izbora broja a; za $b = -1$ ona postaje neprekidna u 0, i, konačno, za $c = 0$ funkcija f postaje neprekidna u tački 1.

d) Iz jednakosti $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ i $\lim\limits_{x\to \pi} f(x) = \pi/2$, (proveriti!) sledi da za $a = 1$ i $b = \pi/2$ funkcija f postaje neprekidna na svom domenu.

5.17. *Ispitati neprekidnost složenih funkcije $f \circ g$ i $g \circ f$ na* $\mathbf{R}$, *ako je* $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbf{R}$, *i*

a) $g(x) = 1 + x^2$; b) $g(x) = x(1+x)$; c) $g(x) = 1 + x - [x]$.

Rešenja.

a) Funkcija $f(g(x)) = \operatorname{sgn}(1+x^2) = 1$, $x \in \mathbf{R}$, je neprekidna na $\mathbf{R}$. Medjutim, funkcija $g(f(x)) = 1 + (\operatorname{sgn} x)^2 = \begin{cases} 2, & x < 0; \\ 1, & x = 0; \\ 2, & x > 0, \end{cases}$ ima otklonjiv prekid u tački 0.

b) U ovom slučaju je

$$f(g(x)) = \operatorname{sgn}(x(1+x)) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0; \\ 0, & x = -1,\ x = 0; \\ 1, & x < -1,\ x > 0, \end{cases}$$

$$g(f(x)) = \operatorname{sgn} x\,(1 + \operatorname{sgn} x)) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 2, & x > 0. \end{cases}$$

Obe funkcije imaju prekide prve vrste u tački $x = 0$; funkcija $f \circ g$ ima takodje prekid prve vrste u tački $x = -1$.

c) Obe složene funkcije su neprekidne, jer je

$$f(g(x)) = \operatorname{sgn}(1 + x - [x]) = 1, \qquad g(f(x)) = 1 + \operatorname{sgn} x - [\operatorname{sgn} x] = 1.$$

5.18. *Pokazati da monotona funkcija može imati samo prekide prve vrste.*

5.19. *Ako je funkcija* $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *neprekidna na kompaktnom skupu* $K \subset A$, *tada je njen skup vrednosti* $f(K) := \{y \in \mathbf{R} |\ (\exists x \in K)\ y = f(x)\}$, *takodje kompaktan skup.*

Rešenje. Skup $f(K)$ može biti ili konačan ili beskonačan. Ako je $f(K)$ konačan, tada je zatvoren i ograničen, pa je prema tome $f(K)$ kompaktan skup.

Ako $f(K)$ ima beskonačno mnogo elemenata, tada je za kompaktnost skupa $f(K)$ dovoljno pokazati da svaki njegov beskonačan podskup $S \subset f(K)$ ima tačku nagomilavanja koja pripada $f(K)$. U tom cilju, stavimo

$$T := \{x \in K |\ (\exists y \in S)\ y = f(x)\}.$$

Pošto je f funkcija, skup T je takodje beskonačan. Sa druge strane, pošto je T podskup kompaktnog skupa K, to on ima tačku nagomilavanja x_0 koja pripada K. Pokazaćemo da je $f(x_0)$ tačka nagomilavanja skupa S. Neka je $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ neki niz iz T koji konvergira ka x_0, sa osobinom da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi $x_n \neq x_0$. Pošto je f neprekidna u x_0, na osnovu definicije 5.3 važi:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0),$$

što znači da je $f(x_0)$ tačka nagomilavanja skupa S.

5.20. *Ispitati neprekidnost sledećih funkcija:*

a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2 + x^n}$, $x \geq 0$; b) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$, $x \in \mathbf{R}$;

c) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 + x^{4n}}$, $x \in \mathbf{R}$; d) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \sin^{2n} x)$, $x \in \mathbf{R}$;

e) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{2 + (2\sin x)^{4n}}$, $x \in \mathbf{R}$.

Rešenja.

a) Pre svega važi: $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1); \\ 1, & x = 1; \\ +\infty, & x > 1. \end{cases}$

Dakle, za funkciju f važi $f(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq x < 1; \\ 1/3, & x = 1; \\ 0 & x > 1, \end{cases}$

pa f ima prekid prve vrste u tački $x = 1$.

Primedba. Ovaj primer pokazuje da funkcija dobijena kao granica niza neprekidnih funkcija ne mora biti neprekidna.

b) Lako se pokazuje da je $f(x) = \operatorname{sgn} x$, tako da funkcija f ima prekid prve vrste u tački $x = 0$.

c) Pokažimo da je $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1; \\ x^4, & |x| > 1. \end{cases}$

Za $|x| \leq 1$ važi

$$\sqrt[n]{3} \leq \sqrt[n]{3 + x^{4n}} \leq \sqrt[n]{3 + 1} = \sqrt[n]{4},$$

pa je

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 + x^{4n}} = 1.$$

Za $|x| > 1$ važi

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 + x^{4n}} = \lim_{n\to\infty} x^4 \cdot \sqrt[n]{1 + \frac{3}{x^{4n}}} = x^4.$$

Dakle, granična funkcija f je neprekidna na $\mathbf{R}$.

d) Funkcija f ima otklonjive prekide u tačkama $(2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$, pošto je jednaka

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbf{Z}; \\ 0, & x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

e) Krenimo od sledećih relacija:

$$|2\sin x| < 1 \iff (\exists k \in \mathbf{Z})\ |x - k\pi| < \pi/6,$$

$$|2\sin x| > 1 \iff (\exists k \in \mathbf{Z})\ \frac{\pi}{6} < |x - k\pi| < \frac{5\pi}{6}.$$

Dakle, granična funkcija f je jednaka

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & |\sin x| < 1/2, & \text{tj. } |x - k\pi| < \pi/6,\ k \in \mathbf{Z}; \\ x/3, & |\sin x| = 1/2, & \text{tj. } x = k\pi \pm \pi/6,\ k \in \mathbf{Z}; \\ 0, & |\sin x| > 1/2, & \text{tj. } \pi/6 < |x - k\pi| < 5\pi/6,\ k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

U tačkama $x_k = k\pi \pm \pi/6$, $k \in \mathbf{Z}$, f ima prekide prve vrste.

5.21. *Ispitati neprekidnost sledećih funkcija:*

a) Dirihleova funkcija: $D(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \left(\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n(\pi m!\, x)\right)$, $x \in \mathbf{R}$;

b) $f(x) = x \cdot D(x)$, *gde je funkcija D definisana u a);*

c) Rimanova funkcija:

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{m}{n},\ m\in \mathbf{Z},\ n\in \mathbf{N},\ \mathrm{nzd}(m,n)=1;\\ 0, & x\in \mathbf{R}\setminus \mathbf{Q}.\end{cases}$$

Uporediti funkciju D iz zadatka a) sa onom iz zadatka 5.5 b). U c), $\mathrm{nzd}(m,n)$ označava *najveći zajednički delilac* brojeva m and n. Ako je $\mathrm{nzd}(m,n)=1$, tada su m i n medjusobno prosti brojevi i razlomak m/n se ne može skratiti.

Rešenja.

a) **Prvi metod.** Neka je prvo x racionalan broj, tj. $x=\frac{p}{q}$ za neko $p\in \mathbf{Z}$ i $q\in \mathbf{N}$. Tada za $m>q$ važi

$$m!\,x=m!\frac{p}{q}=1\cdot 2\cdots(q-1)(q+1)\cdots m\cdot p,$$

dakle $m!\,x$ je paran broj. To povlači $\cos(\pi m!\,x)=1$, ili $D(x)=1$ za svako $x\in \mathbf{Q}$.

Ako je x iracionalan broj, tada ni za jedno $m\in \mathbf{N}$ nije $m!\,x$ ceo broj. Ali tada važi $|\cos(\pi m!\,x)|<1$, što povlači

$$\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!\,x)=0.$$

Uzimanjem granične vrednosti leve i desne strane zadnje jednakosti (kada $m\to\infty$), dobijamo

$$(\forall x\in \mathbf{R}\setminus \mathbf{Q})\quad D(x)=0.$$

Tako smo dobili istu funkciju kao u zadatku 5.5 b), gde smo dokazali da je funkcija D prekidna u svakoj tački $x\in \mathbf{R}$.

Drugi metod. Dokazaćemo ponovo da je D prekidna u svakoj tački realne prave, ali koristeći definiciju 5.3.

Ako je x_0 proizvoljan realan broj, tada postoje dva niza, $(r_n)_{n\in \mathbf{N}}$ i $(i_n)_{n\in \mathbf{N}}$ prvi racionalnih, a drugi iracionalnih brojeva, koji oba konvergiraju ka x_0. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} r_n=x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} D(r_n)=1 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} i_n=x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} D(i_n)=0.$$

Dakle, ni za jedno $x_0\in \mathbf{R}$ ne postoji $\lim_{x\to x_0} D(x)$, što znači da funkcija D ima prekid druge vrste u svakoj tački $x_0\in \mathbf{R}$.

b) Prema a) je $|D(x)|\le 1$ za sve $x\in \mathbf{R}$. Ako je $x_0=0$, tada za svako $\varepsilon>0$ važi

$$|f(x)-f(0)|=|x\cdot D(x)-0|\le |x|=|x-0|<\varepsilon,$$

pod uslovom da je $|x-0|<\delta:=\varepsilon$. Dakle, f je neprekidna u 0.

Sada ćemo pokazati da je 0 i jedini realan broj u kome je f neprekidna funkcija. Neka je $x_0\in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ i neka su $(r_n)_{n\in \mathbf{N}}$ i $(i_n)_{n\in \mathbf{N}}$ dva niza racionalnih, odnosno iracionalnih brojeva takvih da je

$$\lim_{n\to\infty} r_n=x_0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} i_n=x_0.$$

Tada je $\lim_{n\to\infty} f(r_n)=x_0\cdot 1=x_0$ i $\lim_{n\to\infty} f(i_n)=x_0\cdot 0=0$. To znači da f ima prekid druge vrste u svakom realnom broju koji je različit od 0.

c) Pokazaćemo da je Rimanova funkcija neprekidna u svakom iracionalnom, ali je prekidna u svakom racionalnom broju.

Neka je prvo $x_0\in \mathbf{R}\setminus \mathbf{Q}$. Posmatrajmo niz racionalnih brojeva $(r_k)_{k\in \mathbf{N}}$ koji konvergira ka x_0, gde je $r_k=\frac{m_k}{n_k}$, i pretpostavimo da je $\mathrm{nzd}(m_k,n_k)=1$ za svako $k\in \mathbf{N}$. Tada važi $\lim_{k\to\infty} n_k=+\infty$, pa je

$$\lim_{k\to\infty} R(r_k)=\lim_{k\to\infty} R\left(\frac{m_k}{n_k}\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}=0=R(x_0). \tag{5.4}$$

Očevidno je da za svaki niz iracionalnih brojeva $(i_k)_{k\in \mathbf{N}}$ koji konvergira ka x_0 važi

$$\lim_{k\to\infty} R(i_k)=0=R(x_0). \tag{5.5}$$

Ako spojimo relacije (5.4) i (5.5), to sledi da i za svaki niz *realnih* brojeva $(x_k)_{k\in \mathbf{N}}$ koji konvergira ka x_0 važi

$$\lim_{k\to\infty} R(x_k)=0=R(x_0).$$

To znači da je R neprekidna u svakom iracionalnom broju.

Neka je sada x_0 racionalan broj oblika $x_0=\frac{m}{n}$, gde je $\mathrm{nzd}(m,n)=1$. Iz definicije funkcije R sledi $R(x_0)=\frac{1}{n}$. Stavimo sada $r_k:=(mk+1)/(nk)$, $k\in \mathbf{N}$. Ovaj niz racionalnih brojeva konvergira ka x_0 kada $k\to\infty$; medjutim, važi

$$\lim_{k\to\infty} R(r_k)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{nk}=0\ne\frac{1}{n}=R(x_0).$$

Dakle, funkcija R ima prekid u svakom racionalnom broju.

Primedba. Prema zadatku 5.21 c), Rimanova funkcija je neprekidna *van* skupa racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$, čija je Lebegova mera nula. Prema teoremi 8.1.4 iz [1], ona je Lebeg- (ali ne i Riman-) integrabilna na svakom konačnom intervalu.

5.22.. *Funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je data sa*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ 1/x, & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \\ x, & x \in \mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) *Pokazati da je* f *bijekcija.*

b) *Ispitati neprekidnost funkcije* f *u tačkama* $x' = 1$, $x'' = -1$ *i* $x''' = 0$.

c) *Ispitati neprekidnost funkcije* f *u tački* $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

Rešenja.

a) Treba da pokažemo da je f injekcija, tj.

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

i surjekcija, tj.

$$(\forall y \in \mathbb{R})\,(\exists x \in \mathbb{R}) \quad y = f(x).$$

U tom cilju, stavimo

$$g : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \; g(x) = 1/x \tag{5.6}$$

i

$$h : \mathbb{I} \to \mathbb{I}, \; h(x) = x. \tag{5.7}$$

Primetimo da je $f = g$ na skupu $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ i $f = h$ na skupu I. Jednostavno se proverava da su i g i h bijekcije. Pošto je unija njihovih (medjusobno disjunktnih) definicionih skupova skup

$$S := (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \bigcup I = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

a takodje je i unija njihovih (ponovo medjusobno disjunktnih) skupova vrednosti S, to je f bijekcija na S.

Najzad, pošto je $f(x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$, to sledi da je f bijekcija na celom skupu $\mathbb{R}$.

b) Pokazaćemo neprekidnost f u tački $x' = 1$ koristeći definiciju 5.3. Neka je $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ proizvoljan niz pozitivnih realnih koji konvergira ka $x' = 1$; nije restrikcija ako pretpostavimo da je $x_k \neq 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Naš zadatak je da pokažemo

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = 1 \; (= f(1)). \tag{5.8}$$

Neka je $\varepsilon >$ dato. Označimo

$$A_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\} \;\text{ i }\; A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Tada važi tačno jedan od sledeća dva iskaza:

(A) oba skupa A_1 i A_2 su beskonačna;

(B) jedan od skupova A_1 i A_2 je konačan, a drugi je beskonačan.

U slučaju (A), za $j = 1, 2$, važi

$$\lim_{k \to \infty,\, k \in A_j} x_k = 1. \tag{5.9}$$

Uvedimo broj $\mathbf{i}$ kao sledeći infimum: $\mathbf{i} := \inf\{|x_k| \;\big|\; k \in A_1\}$. Jasno je da je $\mathbf{i} \geq 0$. Ustvari, pokazaćemo da je $\mathbf{i}$ pozitivan broj. Ako je $\mathbf{i} = 0$, tada postoji podniz $(x_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ niza $(x_k)_{k \in A_1}$ koji konvergira ka 0; primetimo da je svaki elemenat x_{k_l} gornjeg podniza različit od 0. Medjutim, postojanje takvog podniza je u kontradikciji sa (5.9), što znači da mora biti $\mathbf{i} > 0$.

Na osnovu definicije funkcije f važi $f(x_k) = \dfrac{1}{x_k}$, $k \in A_1$, pa iz nejednakosti $\mathbf{i} > 0$, sledi

$$\begin{aligned} |f(x_k) - 1| &= \frac{|x_k - 1|}{|x_k|} \\ &\leq \left(\inf\{|x_k| \;\big|\; k \in A_1\}\right)^{-1} \cdot |x_k - 1| = \mathbf{i}^{-1} \cdot |x_k - 1|. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Za dato $\varepsilon > 0$ izaberimo $k_1 \in \mathbb{N}$ takvo da je

$$(\forall k \in A_1) \;\; k > k_1 \Rightarrow (|x_k - 1| < \mathbf{i} \cdot \varepsilon).$$

To povlači

$$(\forall k \in A_1) \quad k > k_1 \Rightarrow |f(x_k) - f(1)| < \mathbf{i}^{-1} \cdot (\mathbf{i} \cdot \varepsilon) = \varepsilon. \tag{5.11}$$

Pošto za svako $k \in A_2$ važi $f(x_k) = x_k$, za dato $\varepsilon > 0$ postoji $k_2 \in \mathbb{N}$ takvo daje

$$(\forall k \in A_2) \;\; k > k_2 \Rightarrow (|f(x_k) - f(1)| = |x_k - 1| < \varepsilon). \tag{5.12}$$

Sada na osnovu (5.11) i (5.12) dobijamo sledeća nejednakost:

$$(\forall k \in N) \quad k > \max\{k_1, k_2\} \Rightarrow |f(x_k) - f(1)| < \varepsilon, \tag{5.13}$$

što znači da je pod pretpostavkom (A) funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}$.

Slučaj (B) je nešto jednostavniji i ostavljamo ga čitaocu za vežbu.

Dokaz neprekidnosti funkcije f u tački $x'' = -1$ je potpuno analogan prethodnom dokazu, pa ga takodje izostavljamo.

Najzad, pokažimo da je f prekidna u tački $x''' = 0$. Očevidno je

$$\lim_{x \to 0,\, x \in \mathbb{I}} f(x) = \lim_{x \to 0,\, x \in \mathbb{I}} x = 0 = f(0).$$

Za racionalan broj x takav da je $|x| < 1$ važi

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = \frac{1}{|x|} > 1.$$

Izaberimo $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Tada za svako $\delta > 0$ postoji $x_\delta \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, takava da važi

$$|x_\delta| < \delta \Rightarrow |f(x_\delta) - f(0)| > 1 > \varepsilon.$$

To znači da granična vrednost $\lim\limits_{x\to 0,\ x\in\mathbb{Q}} f(x)$ ne može biti jednaka 0 (ustvari, ona i ne postoji), pa iz teoreme 5.5 sledi da f ne može biti neprekidna u 0.

c) Pokazaćemo da je f prekidna u svakoj tački skupa $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$. Neka je prvo $x_0 \in \mathbb{Q}\setminus\{-1,0,1\}$. Tada za svako $k\in\mathbb{N}$ postoji iracionalan broj x_k, $x_k \neq x_0$, koji pripada intervalu $(x_0-\frac{1}{k}, x_0+\frac{1}{k})$, pa je $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. Medjutim, tada je

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \neq \frac{1}{x_0} = f(x_0),$$

što povlači da je f prekidna u x_0.

Drugi slučaj, tj. kada je $x_0 \in \mathbb{I}$, je analogan prethodnom i ostavljamo ga čitaocu za vežbu.

5.2 Uniformna neprekidnost

Definicija 5.6. *Funkcija $f : A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je* **uniformno neprekidna na skupu** *$X\subset A$ ako za svako $\varepsilon>0$ postoji broj $\delta>0$, koji zavisi* samo *od ε, takav da za svaki par $x_1,x_2\in X$ sa osobinom $|x_1-x_2|<\delta$ važi $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.*

Koristeći logičke simbole, definicija 5.29 se može napisati na sledeći način.

Funkcija $f : A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je **uniformno neprekidna na skupu** *$X\subset A$ ako i samo ako je*

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0)\ (\forall x_1,x_2\in X)\ \ |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon. \tag{5.14}$$

Jasno, uniformno neprekidna funkcija na skupu X je takodje neprekidna u svakoj tački tog skupa. Kako ćemo videti u zadatku 5.24, u opštem slučaju obrnuto tvrdjenje nije tačno. Medjutim, važi sledeće tvrdjenje.

Teorema 5.2. *Ako je funkcija $f : A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neprekidna na kompaktnom skupu $K\subset A$, tada je i uniformno neprekidna na K.*

Sledeće dve teoreme daju dve važne osobine neprekidnih funkcija na kompaktnom skupu, odnosno na zatvorenom ograničenom intervalu (koji je, dakle, takodje kompaktan skup).

Teorema 5.3. *Ako je funkcija $f : A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neprekidna na kompaktnom skupu $K\subset A$, tada dostiže svoj minimum i maksimum na skupu K.*

Drugim rečima, postoje dva broja x_m i x_M iz K sa osobinom da za svako $x\in K$ važi

$$f(x_m) \le f(x) \le f(x_M).$$

Teorema 5.4. *Neka je funkcija $f : A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ neprekidna na intervalu $[a,b]\subset A$, i neka je, naprimer, $f(a) < f(b)$. Tada za svako y, takvo da je $f(a) < y < f(b)$, postoji $x\in(a,b)$ takvo da je $f(x) = y$.*

Drugim rečima, neprekidna funkcija koja nije konstanta preslikava interval na neki drugi interval.

5.2.1 Zadaci

5.23. *Pokazati uniformnu neprekidnost sledećih funkcija.*

a) $f(x) = x^2 - x - 2$, $x\in[3,6]$; b) $f(x) = 5x - 4$, $x\in\mathbb{R}$.

Rešenja.

a) Naravno, uniformna neprekidnost funkcije f sledi neposredno iz teoreme 5.2, jer je f neprekidna na kompaktnom skupu $[3,6]$. Mi ćemo, medjutim, tvrdjenje pokazati direktno. Za svaki par $x_1,x_2\in[3,6]$ važi

$$|f(x_1)-f(x_2)| = |(x_1^2-x_1-2)-(x_2^2-x_2-2)| = |x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2-1| \le 11\cdot|x_1-x_2|.$$

Odavde sledi da za dato $\varepsilon>0$ možemo izabrati $\delta := \varepsilon/11$, jer tada važi implikacija

$$(\forall x_1,x_2\in[3,6])\ \ |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

b) Pošto za svaki par $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ važi

$$|f(x_1)-f(x_2)| = 5\cdot|x_1-x_2|,$$

za dato $\varepsilon>0$ možemo izabrati $\delta := \varepsilon/5$. Tada važi sledeća implikacija

$$(\forall x_1,x_2\in\mathbb{R})\ \ |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

Primetimo da je ova funkcija uniformno neprekidna na *nekompaktnom* skupu $\mathbb{R}$ (jer $\mathbb{R}$ nije ograničen skup).

5.24. *Data je funkcija* $f(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$. *Pokazati*

a) *da je* f *uniformno neprekidna na skupu* $(c,1)$, *gde je* $0<c<1$;

b) *da* f *nije uniformno neprekidna (ali jeste neprekidna) na skupu* $(0,1)$,

Rešenja.

a) Neka je $\varepsilon>0$ dato. Za svaki par x_1,x_2 iz intervala $(c,1)$ važi

$$|f(x_1)-f(x_2)| = \frac{|x_1-x_2|}{x_1x_2} \le \frac{|x_1-x_2|}{c^2}.$$

Zato možemo uzeti $\delta := c^2\varepsilon$, jer tada važi

$$(\forall x_1,x_2\in(c,1))\ (|x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon).$$

Pitanje: Zašto nismo mogli prosto primeniti teoremu 5.2?

b) Da bi dokazali da funkcija f nije uniformno neprekidna na otvorenom intervalu $(0,1)$, koristićemo sledeća dva niza: $x_n=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, i $x'_n=\frac{1}{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. Očevidno, ta oba niza konvergiraju ka 0, tj.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = 0.$$

Medjutim, važi

$$|f(x_n)-f(x'_n)| = \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right)\right| = |n-(n+1)| = 1.$$

Ako stavimo $\varepsilon := \frac{1}{2}$, tada za svako $0<\delta<1$ postoji $n\in\mathbb{N}$ (koje zavisi od δ) takvo da je

$$|x_n-x'_n| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta.$$

To povlači

$$|f(x_n - f(x'_n)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Konačno, pokažimo neprekidnost funkcije f u svakoj tački $x_0\in(0,1]$. Za dato $\varepsilon>0$ izaberimo

$$\delta := \min\left\{\frac{x_0}{2}, \frac{\varepsilon}{2x_0^2}\right\}. \tag{5.15}$$

Ako je $|x-x_0|<\delta$, tada važi

$$|f(x)-f(x_0)| = \frac{|x-x_0|}{x\cdot x_0} < \frac{2|x-x_0|}{x_0^2} < \varepsilon.$$

Primedba. Važno je razumeti da je broj δ iz (5.15) zavisio ne samo od ε, nego i od posmatrane tačke x_0. U stvari, u ovom slučaju nije bilo moguće odrediti δ *uniformno* u odnosu na x_0.

5.25. *Ispitati uniformnu neprekidnost sledećih funkcija na njihovim domenima:*

a) $f(x)=\ln x$, $x\in(0,1)$;

b) $f(x)=x\cdot\sin x$, $x\in[0,+\infty)$;

c) $f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\in(0,\pi);\\ 0, & x=0;\end{cases}$

d) $f(x)=e^x\cdot\cos\frac{1}{x}$, $x\in(0,1)$.

Rešenja.

a) Pokazaćemo da je funkcija $f(x)=\ln x$, $x\in(0,1)$, neprekidna u svakoj tački $x_0\in(0,1)$, ali nije uniformno neprekidna na otvorenom intervalu $(0,1)$.

Neka je $x_0\in(0,1)$ i neka je $\varepsilon\in(0,1)$ dato. Nejednakost

$$|f(x)-f(x_0)| = |\ln x - \ln x_0| < \varepsilon$$

je ekvivalentna sa

$$-\varepsilon < \ln\frac{x}{x_0} < \varepsilon \iff x_0e^{-\varepsilon} < x < x_0e^{\varepsilon}$$

To znači da ako uzmemo $\delta := \min\{x_0-x_0e^{-\varepsilon}, x_0e^{\varepsilon}-x_0\}$, tada važi sledeća implikacija:

$$(\forall x\in(0,1))\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Na sličan način se pokazuje neprekidnost logaritamske funkcije na celom intervalu $(0,+\infty)$.

Da bi pokazali da f nije uniformno neprekidna na $(0,1)$, koristićemo sledeća dva niza koji konvergiraju ka 0, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gde je

$$x_n := \frac{1}{e^n} \quad \text{i} \quad x'_n := \frac{1}{e^{n+1}}, \quad \text{za} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Stavimo $\varepsilon := 1/2$. Tada za svako $\delta>0$ postoji $n=n_\delta\in\mathbb{N}$ sa osobinom da je

$$|x_n-x'_n| = \frac{e-1}{e^{n+1}} < \delta.$$

Medjutim, za to n važi

$$|f(x_n)-f(x'_n)| = |(-n)-(-(n+1))| = 1 > \varepsilon,$$

pa f nije uniformno neprekidna na $(0,1)$.

b) Pokazaćemo da data funkcija f nije uniformno neprekidna na $[0,+\infty)$.

Neka je $x_n = n\pi$ i $x'_n = n\pi + \frac{1}{n}$. Tada za dato $\delta > 0$, postoji $n = n_\delta$ sa osobinom $|x_n - x'_n| = \frac{1}{n} < \delta$. Ako stavimo $\varepsilon = 1$, tada za $n > 2$ važi:

$$
\begin{aligned}
|f(x_n) - f(x'_n)| &= \left|n\pi \sin(n\pi) - \left(n\pi + \frac{1}{n}\right) \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)\right| \\
&= |(-1)^n \sin\frac{1}{n}| \left(n\pi + \frac{1}{n}\right) > \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n}\right)(n\pi + \frac{1}{n}) > 2 > \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Koristili smo nejednakost $\sin x > \frac{2}{\pi}x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Dakle, f nije uniformno neprekidna na $[0, +\infty)$.

Primetimo da je f proizvod dve uniformno neprekidne funkcije na $[0, +\infty)$ (pokažite to).

c) Pre svega, $x \in [0, \pi)$ važi nejednakost $|f(x)| \leq |x|$. Neka je $\varepsilon > 0$ dato; nije restrikcija ako pretpostavimo da je $0 < \varepsilon < \pi$. Ako je $x_1, x_2 \in [0, \varepsilon/2]$, tada za $\delta_1 := \varepsilon/2$ važi

$$
|x_1 - x_2| < \delta_1 \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < x_1 + x_2 < \varepsilon, \tag{5.16}
$$

Ako je $x_1, x_2 \in [\varepsilon/2, \pi]$, tada važi:

$$
\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &= \left|x_1 \sin\frac{1}{x_1} - x_2 \sin\frac{1}{x_2}\right| \\
&= \left|x_1 \sin\frac{1}{x_1} - x_2 \sin\frac{1}{x_2} + x_2 \sin\frac{1}{x_1} - x_2 \sin\frac{1}{x_1}\right| \\
&\leq |x_1 - x_2| \left|\sin\frac{1}{x_1}\right| + x_2 \left|2 \sin\frac{x_1 - x_2}{2x_1x_2} \cos\frac{x_1 + x_2}{2x_1x_2}\right| \\
&\leq |x_1 - x_2| + 2x_2 \frac{|x_1 - x_2|}{2x_1x_2} \leq |x_1 - x_2| + \frac{1}{x_1}|x_1 - x_2|.
\end{aligned}
$$

Tako dobijamo $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2| \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)$. Dakle, ako izaberemo $\delta_2 := \frac{\varepsilon^2}{2 + \varepsilon}$, tada važi sledeća implikacija:

$$
(\forall x_1, x_2 \in [\varepsilon, \pi)) \quad |x_1 - x_2| < \delta_2 \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{5.17}
$$

Relacije (5.16) i (5.17) povlače da ako za dato $\varepsilon > 0$ izaberemo $\delta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon^2}{2 + \varepsilon}\right\}$, tada važi implikacija

$$
(\forall x_1, x_2 \in [0, \pi)) \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.
$$

Time smo pokazali uniformnu neprekidnost funkcije f na $(0, \pi)$.

d) Pošto je $0 \notin (0, 1)$, data funkcija je neprekidna na $(0, 1)$. Sada ćemo pokazati da ona nije uniformno neprekidna na $(0, 1)$.

Neka je $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ i $x'_n = \frac{1}{(2n + 1)\pi}$ za $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$
\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n = 0.
$$

Sada za dato $\delta > 0$ postoji $n = n_\delta$ takvo da je

$$
|x_n - x'_n| = \frac{1}{2n(2n + 1)\pi} < \delta.
$$

Medjutim, za svako n važi

$$
\begin{aligned}
|f(x_n) - f(x'_n)| &= \left|\exp\left(\frac{1}{2n\pi}\right) \cos 2n\pi - \exp\left(\frac{1}{(2n + 1)\pi}\right) \cos(2n + 1)\pi\right| \\
&= \exp\left(\frac{1}{2n\pi}\right) + \exp\left(\frac{1}{2n + 1)\pi}\right) > 2,
\end{aligned}
$$

što znači da f nije uniformno neprekidna na $(0, 1)$.

5.26. *Pokazati da je funkcija* $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$, $x \neq 0$, *uniformno neprekidna na svakom od intervala* $(-1, 0)$ *i* $(0, 1)$, *ali nije uniformno neprekidna na njihovoj uniji* $(-1, 0) \bigcup (0, 1)$.

Rešenje. Na intervalu $(0, 1)$ funkcija f je jednaka funkciji

$$
F_1(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ \frac{\sin x}{x}, & 0 < x < 1; \\ \sin 1, & x = 1. \end{cases}
$$

Jasno, F_1 je neprekidna na zatvorenom intervalu $[0, 1]$, pa je zato i uniformno neprekidna na $[0, 1]$. Ovo povlači i uniformnu neprekidnost f na intervalu $(0, 1)$. Analogno, funkcija F_2 data sa

$$
F_2(x) = \begin{cases} -\sin 1, & x = -1; \\ -\frac{\sin x}{x}, & -1 < x < 0; \\ -1, & x = 0. \end{cases}
$$

je uniformno neprekidna na zatvorenom intervalu $[-1,0]$, i jednaka je f na $(-1,0)$. Dakle, f je uniformno neprekidna i na $(-1,0)$.

Sada ćemo pokazati da f *nije* uniformno neprekidna na uniji $A := (-1,0)\bigcup(0,1)$. Neka je $x_n = -\dfrac{1}{n+1}$ i $x'_n = \dfrac{1}{n+1}$ za $n \in \mathrm{N}$. Ova dva niza elemenata iz skupa A konvergiraju ka 0 kada $n \to \infty$. Za dato $\delta > 0$ postoji $n = n_\delta$ sa osobinom $|x_n - x'_n| = \dfrac{2}{n+1} < \delta$. Medjutim, za svako $n \in \mathrm{N}$ važi

$$\begin{aligned}|f(x_n) - f(x'_n)| &= \left|\frac{\left|\sin\left(\frac{-1}{n+1}\right)\right|}{-\frac{1}{n+1}} - \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right|}{\frac{1}{n+1}}\right| \\ &= 2(n+1)\left|\sin\frac{1}{n+1}\right| \geq 2(n+1)\cdot\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n+1}\right) = \frac{4}{\pi}.\end{aligned}$$

To znači da za (naprimer) $\varepsilon = 1$ važi $|f(x_n) - f(x'_n)| > \varepsilon$, što pokazuje da f nije uniformno neprekidna na skupu $(-1,0)\bigcup(0,1)$.

5.27. *Ako je funkcija $f : I \to \mathbf{R}$ ograničena, monotona i neprekidna na otvorenom intervalu I, tada je f takodje uniformno neprekidna na I ako je*

a) $I = (a,b)$; b) $I = (a,+\infty)$.

Rešenje.

a) Pokažimo prvo da ograničena, monotona i neprekidna funkcija na otvorenom intervalu (a,b) ima desnu graničnu vrednost u a. Neka je, naprimer, f monotono rastuća na (a,b). Pošto je f ograničena na (a,b), to je skup

$$B := f((a,b)) = \{y \in \mathbf{R} |\ (\exists x \in (a,b))\ y = f(x)\}$$

(skup vrednosti funkcije f) ograničen odozdo. Skup B ima infimum, koji ćemo obeležiti sa L. Pokažimo sada da je

$$\lim_{x\to a+} f(x) = L. \tag{5.18}$$

U tom cilju, neka je $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ proizvoljni niz brojeva iz intervala (a,b), takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Prelaskom na podniz (ako je potrebno), možemo pretpostaviti da je niz $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ monotono opadajući. Prema pretpostavci, tada je i niz $(f(x_n))_{n\in\mathrm{N}}$ monotono opadajući. Pošto za svako $n \in \mathrm{N}$ važi $f(x_n) \geq L$, to postoji granična vrednost

$$L' := \lim_{n\to\infty} f(x_n). \tag{5.19}$$

Jasno, ili je $L' > L$, ili je, kao što što tvrdimo, $L' = L$.

Ako je $L' > L$, tada postoji element $y_0 \in B$ sa osobinom $L' > y_0 > L$, jer je L infimum skupa B. Pošto je f neprekidna na intervalu (a,b), možemo primeniti teoremu 5.4, koja daje postojanje jedinstvenog broja $x_0 \in (a,b)$ sa osobinom $f(x_0) = y_0$. Iz jednakosti $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ sledi da postoji n_0 sa osobinom $n > n_0 \Rightarrow a < x_n < x_0$.

To povlači implikaciju $n > n_0 \Rightarrow f(x_n) \leq f(x_0) = y_0$. Pošto je $y_0 < L'$, to za beskonačno mnogo indeksa n važi $f(x_n) < L'$. Medjutim, činjenica da je niz $(f(x_n))_{n\in\mathrm{N}}$ opadajući je u kontradikciji sa definicijom broja L' u (5.19). Dakle mora biti $L = L'$, što povlači $L = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Pošto je $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ proizvoljan niz koji konvergira ka a, to sledi da važi relacija (5.18).

Na analogan način se može pokazati da leva granična vrednost funkcije f u tački b takodje postoji; stavimo

$$K := \lim_{x\to b-} f(x). \tag{5.20}$$

Uvedimo sada sledeću funkciju:

$$F(x) := \begin{cases} L, & x = a; \\ f(x), & a < x < b; \\ K, & x = b. \end{cases} \tag{5.21}$$

Izborom brojeva L i K, funkcija F postaje neprekidna na kompaktnom skupu $[a,b]$, pa je prema teoremi 5.2 ona uniformno neprekidna na $[a,b]$. Ali tada trivijalno sledi da je f uniformno neprekidna na (a,b).

b) Na sličan način kao u a), može se pokazati postojanje granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = L$. Pretpostavimo da je, naprimer, funkcija f monotono rastuća. Tada iz ograničenosti f sledi da je skup

$$B := f((a,+\infty)) = \{y \in \mathbf{R} |\ (\exists x \in (a,+\infty))\ y = f(x)\}$$

ograničen odozgo. Tada sledi da skup B ima supremum, koji ćemo obeležiti sa K. Slično kao u a), može se pokazati $\lim_{x\to\infty} f(x) = K$.

Da bi pokazali uniformnu neprekidnost funkcije f na $(a,+\infty)$, stavimo

$$F(x) := \begin{cases} L, & x = a; \\ f(x), & x > a. \end{cases}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Tada postoji broj $T > a$, koji zavisi od ε, takav da je

$$\forall x > T \ \Rightarrow\ |F(x) - K| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{5.22}$$

Na osnovu a), F je uniformno neprekidna na skupu $[a,T]$, pa je i f uniformno neprekidna na $(a,T]$. To znači da postoji $\delta > 0$ sa osobinom

$$(\forall x_1, x_2 \in (a, T])\ \left(|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad (5.23)$$

Ostaje da pokažemo da je f uniformno neprekidna i na skupu $[T, +\infty)$. U tom cilju, primetimo da iz (5.22) sledi da za $x_1 > T$ i $x_2 > T$ važi

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &< |f(x_1) - K + K - f(x_2)| \\ &\leq |f(x_1) - K| + |K - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \qquad (5.24)$$

Dakle $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon/2$, i iz relacija (5.23) i (5.24) sledi da je funkcija f uniformno neprekidna na skupu $[T, +\infty)$.

Primedba.

- Funkcija F iz (5.21) koja je neprekidna na $[a, b]$ i jednaka f na (a, b), se naziva **neprekidno proširenje** funkcije f sa (a, b) na $[a, b]$.
- Pretpostavka o monotonosti funkcije f u zadatku 5.37 je bitna. Naime, funkcija $g(x) = \sin(1/x)$, $x \in (0, 1)$ jeste neprekidna i ograničena na $(0, 1)$, ali se ne može neprekidno proširiti na ceo interval $[0, 1]$ (videti zadatak 5.15 c)).

5.28.. *Pokazati uniformnu neprekidnost sledećih funkcija na datom skupu X, ako je:*

a) $f(x) = \sin x$, $X = \mathbb{R}$; b) $f(x) = \cos x$, $X = \mathbb{R}$;

c) $f(x) = x^3$, $X = (-3, 3)$; d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $X = [1, +\infty)$.

5.29. *Ispitati uniformnu neprekidnost sledećih funkcija na njihovim domenima, ako je:*

a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in (0, \pi)$; b) $f(x) = x \sin x$, $x \in [0, +\infty)$;

c) $f(x) = \dfrac{x}{9 - x^2}$, $x \in (-2, 2)$; d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Rezultati. U **a)**, **b)** i **c)**, date funkcije su uniformno neprekidne na svojim domenima, dok je funkcija u **d)** neprekidna, ali nije uniformno neprekidna na $(0, +\infty)$.

Glava 6

Izvodi

6.1 Uvod

Definicija 6.1. *Neka je realna funkcija f definisana na otvorenom intervalu (a, b) i neka je $x_0 \in (a, b)$. Tada se sledeća graična vrednost*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (6.1)$$

(pod uslovom da postoji) naziva **prvi izvod funkcije** f **u tački** x_0.

Ponekad, umesto $f'(x_0)$, pišemo $f'_x(x_0)$ da bi naglasili da je x promenljiva po kojoj se traži izvod.

Broj h u (6.1) se zove **priraštaj nezavisno promenljive** x u tački x_0, dok se razlika $f(x_0 + h) - f(x_0)$ naziva **priraštaj zavisno promenljive** u tački x_0. Tako relaciju (6.1) možemo predstaviti kao graničnu vrednost količnika priraštaja zavisno i priraštaja nezavisno promenljive, kada poslednji teži nuli.

Desni izvod i **levi izvod** funkcije f u tački x_0 (označeni sa $f'_+(x_0)$ i $f'_-(x_0)$ respektivno) predstavljaju desnu odnosno levu graničnu vrednost količnika $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Tablica izvoda

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$, $\alpha \neq 0$, $x > 0$.
3. $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.
4. $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

5. $(\mathrm{tg}\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

6. $(\mathrm{ctg}\,x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$, $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

7. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $\quad a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\qquad (e^x)' = e^x$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $\quad a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $\qquad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $\quad x > 0$.

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad |x| < 1$.

10. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad |x| < 1$.

11. $(\mathrm{arctg}\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

12. $(\mathrm{arcctg}\,x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$.

Ako su funkcije f i g definisane na intervalu (a,b) i imaju prve izvode u tački $x \in (a,b)$, tada je

- **prvi izvod zbira**, resp. **razlike** funkcija f i g jednak
$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$
- **prvi izvod proizvoda** funkcija f i g jednak
$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$
i posebno
$$(A \cdot f(x))' = A \cdot f'(x),$$
gde je A proizvoljna realna konstanta;
- **prvi izvod količnika** funkcija f i g jednak
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \qquad \text{pod uslovom da je } g(x) \neq 0.$$

Neka funkcija $g : (a,b) \to (c,d)$ ima prvi izvod u tački $x_0 \in (a,b)$ i neka funkcija $f : (c,d) \to \mathbb{R}$ ima prvi izvod u tački $g(x_0) \in (c,d)$. Tada **prvi izvod** u tački x_0 **složene funkcije**
$$h = f \circ g, \quad h : (a,b) \to \mathbb{R},$$

postoji i važi
$$h'(x_0) = f'_g(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \tag{6.2}$$

Ako za funkciju $f : (a,b) \to (c,d)$ važe sledeća tri uslova:

(i) funkcija f ima prvi izvod u tački $x_0 \in (a,b)$;

(ii) funkcija f je monotona na intervalu (a,b);

(iii) broj $f'(x_0)$ je različit od nule,

tada postoji **inverzna funkcija** $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ za funkciju f. Pod gornjim uslovima, **prvi izvod inverzne funkcije** f^{-1} u tački $y_0 = f(x_0)$ je jednak
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{ili} \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \tag{6.3}$$

Pretpostavimo da jednačina
$$F(x,y) = 0 \tag{6.4}$$
definiše jedinstvenu funkciju
$$y = f(x), \quad x \in (a,b).$$
Tada kažemo da je funkcija f data **implicitno** jednačinom (6.4).

Pretpostavimo još da za neko $x_0 \in (a,b)$, izvod funkcije F iz (6.4) postoji i važi $F'_x(x_0,y_0) \neq 0$, gde je $y_0 = f(x_0)$. Tada iz relacije 6.2 sledi da je **prvi izvod implicitno date funkcije** f u tački x_0 jednak
$$f'(x_0) = -\frac{F'_y(x_0,y_0)}{F'_x(x_0,y_0)} \tag{6.5}$$

Neka su date dve diferencijabilne funkcije $y = y(t)$ i $x = x(t)$ iste promenljive ("parametra") $t \in (\alpha,\beta)$. Tada se funkcija $y = f(x)$, odredjena kao preslikavanje f takvo da vrednosti $x = x(t)$, $t \in (\alpha,\beta)$ dodeljuje vrednost $y = y(t)$ zove **parametarska funkcija**.

Prvi izvod parametarske funkcije $y = f(x)$ u tački x_0 je dat sa
$$y'(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}, \quad t_0 \in (\alpha,\beta) \tag{6.6}$$
gde je $x(t_0) = x_0$. Ustvari, formula (6.6) ima značenje samo u onim tačkama t_0, gde x i y imaju prve izvode i važi $x'_t(t_0) \neq 0$.

Definicija 6.2. *Ako se priraštaj* Δy *funkcije* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *u tački* $x_0 \in (a,b)$ *može pisati u obliku*
$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = D \cdot h + r(h) \cdot h, \tag{6.7}$$

za neko D koje zavisi od x_0, ali ne i od h, i važi

$$\lim_{h\to 0} r(h) = 0,$$

tada za funkciju f kažemo da je **diferencijabilna u tački** x_0.

Teorema 6.1. *Funkcija $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ je diferencijabilna u tački $x_0 \in (a,b)$ ako i samo ako ima prvi izvod u toj tački.*[1]

Iz definicije 6.2 sledi da je broj D iz (6.7) jednak broju $f'(x_0)$, tj. vrednosti prvog izvoda funkcije f u tački x_0, ili $D = f'(x_0)$.

Diferencijal diferencijabilne funkcije f u tački x je *linearna funkcija* $df(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *priraštaja* h, data sa

$$df(x)(h) = D \cdot h, \quad h \in \mathbf{R}.$$

Za funkciju $I(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$, je $D = 1$ za svako $x \in \mathbf{R}$, pa je

$$dI(x)(h) = dx(h) = 1 \cdot h = h, \quad h \in \mathbf{R}.$$

Zbog toga je, izostavljanjem priraštaja h, a na osnovu teoreme 6.1:

$$df(x) = f'(x)\,dx. \tag{6.8}$$

Na osnovu definicije 6.2 i teoreme 6.1, imamo sledeću približnu formulu:

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h, \tag{6.9}$$

pod uslovom da je funkcija f diferencijabilna u tački x_0 i h je "malo".

Neka funkcija f ima prvi izvod u svakoj tački $x \in (a,b)$. Tada se funkcija $f' : (a,b) \to \mathbf{R}$ zove **prvi izvod** funkcije f na (a,b).

Ako prvi izvod funkcije f' u u tački $x_0 \in (a,b)$ postoji, tada se on zove **drugi izvod funkcije f u tački x_0** i označava se sa $f''(x_0)$. Analogno se definišu i treći, četvrti, ..., n–ti izvodi funkcije f u tački x_0, i označavaju se respektivno sa $f'''(x_0)$, $f^{(4)}(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$.

Ako funkcija $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ ima prvi izvod u tački $x_0 \in (a,b)$, tada se prava

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \tag{6.10}$$

gde je $y_0 = f(x_0)$, zove **tangenta grafika funkcije** f u tački $T(x_0, f(x_0))$. Ako dodatno važi $f'(x_0) \neq 0$, tada je prava

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \tag{6.11}$$

normala grafika funkcije f u tački $T(x_0, f(x_0))$.

Neka funkcija f ima prvi izvod u tački x_0. Ako je $0 \leq \alpha < \pi$ ugao izmedju tangente u tački x_0 i pozitivnog smera x–ose, tada važi

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0). \tag{6.12}$$

---

[1] Ova teorema *ne važi* za funkcije dve ili više promenljivih.

Drugim rečima, ugao koji tangenta grafika funkcije f u tački $T(x_0, f(x_0))$ zaklapa sa pozitivnim smerom x–ose je jednak broju $f'(x_0)$, tj. vrednosti prvog izvoda funkcije f u toj tački.

6.1.1 Zadaci

6.1. *Odrediti, po definiciji, prve izvode sledećih funkcija u datim tačkama:*

a) $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$, $x \in \mathbf{R}$, *u tačkama* $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;

b) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x \geq -1$, *u tačkama* $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, *i takodje desni izvod u tački* $x_2 = -1$;

c) $f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, $x > 0$, *u tački* $x_0 = 1$;

d) $f(x) = \sqrt[5]{x+1}$, $x \in \mathbf{R}$, *u tački* $x_0 = -1$.

Rešenja.

a) Iz definicije (6.1), sledi

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h(h-1)^2(h-2)^3 - 0}{h} = -8,$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)(1+h-1)^2(1+h-2)^3 - 0}{h} = 0,$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)(2+h-1)^2(2+h-2)^3 - 0}{h} = 0.$$

b) U ovom slučaju je

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+1+h} - \sqrt{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - \sqrt{1}}{h} = \frac{1}{2},$$

$$f'_+(-1) = \lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt{1+(-1+h)} - \sqrt{1+(-1)}}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Geometrijski, poslednja jednakost znači da je vertikalna prava $x = -1$ tangenta grafika funkcije f u tački $(-1, 0)$.

c) U ovom slučaju je

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{1 + h + (1 + h - 1)\arcsin\sqrt{\dfrac{1+h}{1+h+1}} - 1}{h} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

d) $$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[5]{-1+h+1} - 0}{h} = +\infty.$$

6.2. *Odrediti po definiciji prve izvode sledećih funkcija u datim tačkama:*

a) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, *u tački* $x_0 = 1$;

b) $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2}$, *u tačkama* $x_0 = 0$, $x_1 = -1$;

c) $f(x) = 3 \cdot |2 + x|$, *u tački* $x_0 = -3$.

Rezultati. a) $f'(1) = -3$. b) $f'(0) = \frac{2}{3}$; $f'(-1)$ ne postoji.
c) $f'(-3) = -3$.

6.3. *Odrediti po definiciji prve izvode u tački* x *sledećih funkcija:*

a) $f(x) = x^2 + 2x$, $x \in \mathbf{R}$; b) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $x \in \mathbf{R}$;

c) $f(x) = \ln(x+1)$, $x > -1$; d) $f(x) = \cos(2x)$, $x \in \mathbf{R}$,

Rešenja.

a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - x^2 - 2x}{h} = 2x + 2.$$

b) Za $x \neq 1$, važi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h-1} - \sqrt[3]{x-1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1+h)^2} + \sqrt[3]{(x-1)(x-1+h)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}. \end{aligned}$$

U tački $x = 1$ je

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0+} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = +\infty \quad \text{i} \quad f'_-(1) = \lim_{h\to 0-} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = +\infty,$$

što znači da je tangenta grafika funkcije f u tački $x = 1$ paralelna sa $y-$osom.

c) Za $x > -1$ važi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h+1) - \ln(x+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x+1}\right)^{1/h} \\ &= \frac{1}{x+1} \ln \lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{x+1}\right)^{(x+1)/h} = \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

d) U ovom slučaju je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(2(x+h)) - \cos(2x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin(2x+h)\cdot\sin h}{h} = -2\sin(2x).$$

6.4. *Odrediti po definiciji prve izvode sledećih funkcija u tački* $x \in \mathbf{R}$:

a) $f(x) = x\cos 2x$; b) $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2}$; c) $f(x) = 3^{2+x}$.

6.5. *Odrediti prve izvode sledećih funkcija:*

a) $f(x) = \sqrt[3]{1+x^4}$, $x \in \mathbf{R}$;

b) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1+x^4}}}$, $x \in \mathbf{R}$;

c) $f(x) = 3^{2\operatorname{tg}^3 x}$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$;

d) $f(x) = \ln\sin\operatorname{arcctg} e^x$, $x \in \mathbf{R}$;

e) $f(x) = \ln\sqrt[4]{\frac{2e^{2x}}{1+\cos x}}$, $x \in (0, \pi/2)$;

f) $f(x) = \log_3\log_5\log_7 x$, $x > 7$.

Rešenja.

a) Smenom $u(x) = 1 + x^4$, dobijamo

$$f'(x) = \frac{1}{3}(u(x))^{-2/3}u'(x) = \frac{4x^3}{3\sqrt[3]{(1+x^4)^2}}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^3}{6\sqrt{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{1+x^4}}}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{1+x^4})^2}} \cdot \dfrac{1}{(\sqrt[4]{1+x^4})^3}, \quad x \in \mathbf{R}.$

c) $f'(x) = 3^{2\operatorname{tg}^3 x} \ln 3 \cdot (2\operatorname{tg}^3 x)' = 6 \ln 3 \cdot 3^{2\operatorname{tg}^3 x} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}, \quad x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$

d) U ovom slučaju je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sin \operatorname{arcctg}\ e^x} (\sin \operatorname{arcctg}\ e^x)' \\ &= \frac{1}{\sin \operatorname{arcctg}\ e^x} \cos \operatorname{arcctg}\ e^x \cdot (\operatorname{arcctg}\ e^x)' \\ &= \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}\ (e^x)) \frac{-e^x}{1+e^{2x}} = -\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}, \quad x \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

e) Iz $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln(e^{2x}) - \dfrac{1}{4}\ln\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\ln\cos\dfrac{x}{2},$
dobijamo $f'(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}, \quad x \in (0, \pi/2).$

f) Kako za $x > 0$, $a > 0$ i $a \neq 1$ važi $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ (pokazati!), to je

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\ln 3 \log_5 \log_7 x} (\log_5 \log_7 x)' \\ &= \frac{1}{\log_5 \log_7 x} \cdot \frac{1}{\log_7 x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 3 \ln 5 \ln 7} = \frac{1}{x \ln 3 \ln x \ln \log_7 x}. \end{aligned}$$

6.6. *Odrediti prve izvode sledećih funkcija:*

a) $f(x) = \operatorname{sh} x,\ x \in \mathbf{R};$ b) $f(x) = \operatorname{ch} x,\ x \in \mathbf{R};$

c) $f(x) = \operatorname{tgh} x,\ x \in \mathbf{R};$ d) $f(x) = \operatorname{ctgh} x,\ x \neq 0;$

e) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),\ x \in \mathbf{R};$ f) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}),\ x \in \mathbf{R};$

Rezultati.

a) $f'(x) = \operatorname{ch} x.$ b) $f'(x) = \operatorname{sh} x.$ c) $f'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$

d) $f'(x) = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}.$ e) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$ f) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

6.7. *Odrediti prve izvode sledećih funkcija:*

a) $f(x) = \left(\sqrt[5]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^9, \quad x \neq 0;$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x} + \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}, \quad x \in \mathbf{R};$

c) $f(x) = \cos\cos\cos\cos 2x, \quad x \in \mathbf{R};$

d) $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}, \quad x \in (-1, 1);$

e) $f(x) = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}, \quad x \in \mathbf{R};$

f) $f(x) = \ln(\ln^2(\ln^3(x^2))), \quad x \neq 0;$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin \dfrac{a\sin x + b}{a + b\sin x}, \quad |b| < a;\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right);$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \dfrac{b + a\sin x - \sqrt{b^2-a^2}\cdot\cos x}{a + b\sin x}, \quad |a| < |b|.$

Rešenja.

a) $f'(x) = \dfrac{9}{5}\left(\sqrt[5]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^8 \left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^6}}\right).$ b) $f'(x) = 8x.$

c) $f'(x) = 2\sin\cos\cos\cos 2x \cdot \sin\cos\cos 2x \cdot \sin\cos 2x \cdot \sin 2x.$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}.$ e) $f'(x) = e^x + e^x e^{e^x} + e^x e^{e^x} e^{e^{e^x}}.$

f) $f'(x) = \dfrac{12}{|x| \cdot \ln x^2 \cdot \ln(\ln^3(x^2))}.$ g) $f'(x) = \dfrac{1}{a + b\sin x}.$

h) $f'(x) = \dfrac{1}{a + b\sin x}$ (uporediti sa g)).

6.8. *Odrediti prve izvode sledećih funkcija:*

a) $f(x) = x^x,\ x > 0;$ b) $f(x) = x^{\sqrt{x}},\ x > 0;$

c) $f(x) = (\sqrt{x})^x,\ x > 0;$ d) $f(x) = x^{\sin x},\ x > 0;$

e) $f(x) = (\sin x)^{\cos x},\ \sin x > 0;$ f) $f(x) = (2 + \sin x)^x,\ x \in \mathbf{R}.$

Rešenja.

a) Funkcija f se može napisati kao $f(x) = e^{x\ln x}$, $x > 0$, pa je

$$f'(x) = e^{x\ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

U ovom slučaju se prvi izvod može odrediti i tako da se prvo logaritmuje jednakost $y = x^x$ i onda dobijeni izraz diferencira.

Ustvari, iz $\ln y = x\ln x$ sledi

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1 \Rightarrow y' = y(\ln x + 1).$$

Ako sada u poslednju jednakost stavimo $y = f(x) = x^x$, dobijamo

$$y' = f'(x) = x^x(\ln x + 1).$$

b) Iz jednakosti $f(x) = e^{\sqrt{x}\ln x}$, $x > 0$, sledi

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}\ln x}\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) = x^{\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}.$$

c) Kako je $f(x) = e^{(x\ln x)/2}$, to je $f'(x) = e^{(x\ln x)/2}\left(\frac{1+\ln x}{2}\right)$.

d) Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = e^{\sin x\ln x}\left(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$.

e) Iz jednakosti $f(x) = e^{\cos x\ln\sin x}$ sledi da je

$$f'(x) = e^{\cos x\ln\sin x}\left(-\sin x\ln\sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right).$$

f) Iz jednakosti $f(x) = e^{x\ln(2+\sin x)}$ dobijamo

$$f'(x) = e^{x\ln(2+\sin x)}\left(\ln(2+\sin x) + \frac{x\cos x}{2+\sin x}\right).$$

6.9. *Ako je funkcija $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ diferencijabilna u tački $x_0 \in (a,b)$, tada je u toj tački takodje neprekidna. Pokazati.*

Rešenje. Po definiciji 6.2 priraštaj funkcije f u x_0 se može pisati

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = D\cdot h + r(h)\cdot h,$$

gde D ne zavisi od h, dok ostatak $r(h)$ zadovoljava uslov $\lim\limits_{h\to 0} r(h) = 0$. Kako je $r(h)$ ograničeno (na primer) sa $|D| + 1$ za $|h|$ dovoljno malo, to postoji $\delta_1 > 0$ tako da važi sledeća implikacija:

$$(\forall h \in \mathbf{R}) \quad |h| < \delta_1 \Rightarrow |r(h)| < |D| + 1.$$

Tada za dato $\varepsilon > 0$ postoji $\delta := \frac{1}{2}\min\left\{\frac{\varepsilon}{2|D|+1}, \delta_1\right\}$, tako da je za $|h| < \delta$:

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \le (|D| + |r(h)|)|h| < (2|D| + 1)\frac{\varepsilon}{2|D|+1} = \varepsilon.$$

6.10. *Funkcija f je definisana sa $f(x) = |x|$, $x \in \mathbf{R}$. Pokazati da*

a) *je f neprekidna funkcija u tački $x = 0$;*

b) *f nema prvi izvod u tački $x = 0$;*

c) *nije f diferencijabilna u tački $x = 0$.*

Rešenja.

a) Pokažimo da je funkcija f neprekidna u tački 0. Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Tada važi

$$|f(x) - f(0)| = \big||x| - |0|\big| = |x - 0| < \varepsilon,$$

pod uslovom da je $|x - 0| < \delta := \varepsilon$.

b) Desni (resp. levi) izvod funkcije f u tački 0 je

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+}\frac{|h| - 0}{h} = \frac{h}{h} = 1, \quad (\text{resp.} \quad f'_-(0) = \lim_{h\to 0-}\frac{|h| - 0}{h} = \frac{-h}{h} = -1.)$$

Kako su prethodne granične vrednosti razlčite, f nema prvi izvod u tački nula 0.

Primedba. Ovaj primer pokazuje da funkcija koja je neprekidna u nekoj tački ne mora u toj tački imati i prvi izvod.

c) Kako je u b) pokazano da f nema prvi izvod u tački 0, to iz teoreme 6.1 sledi da f nije diferencijabilna u 0. Sada ćemo direktno pokazati da funkcija f nije diferencijabilna u 0 (tj. bez korišćenja pomenute teoreme).

Neka se priraštaj funkcije f u tački $x = 0$ može zapisati kao

$$f(h) - f(0) = D\cdot h + r(h)\cdot h \iff |h| = (D + r(h))h,$$

gde je h priraštaj nezaisno promenljive. Pokazaćemo da $\lim\limits_{h\to 0} r(h)$ ne postoji, bilo kako da izaberemo konstantu D. Ustvari, važe implikacije

$$h > 0 \Rightarrow r(h) = 1 - D \quad \text{i} \quad h < 0 \Rightarrow r(h) = -1 - D.$$

Kako je $1 - D \neq -1 - D$ za svako D, granična vrednost u nuli ostatka $r(h)$ ne postoji, to sledi da funkcija f nije diferencijabilna u tački nula.

6.11. *Odrediti najveće skupove na kojima su prvi izvodi sledećih funkcija (i) neprekidni; (ii) diferencijabilni; (iii) neprekidno diferencijabilni, ako je:*

a) $f(x) = x \cdot |x|,\ x \in \mathbf{R};$ b) $f(x) = \ln|x|,\ x \neq 0;$

c) $f(x) = |(x+2)^2(x-1)^3|,\ x \in \mathbf{R};$ d) $f(x) = |\cos^3 x|,\ x \in \mathbf{R};$

e) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ *gde je α pozitivan parametar.*

Rešenja.

a) (i) Funkcija f jeste proizvod dve neprekidne funkcije na $\mathbf{R}$, pa je neprekidna na celom skupu $\mathbf{R}$.

(ii) Kako je $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x,\ x \in \mathbf{R}$, možemo pisati $x \cdot |x| = x^2 \cdot \operatorname{sgn} x$, $x \in \mathbf{R}$. Poslednja funkcija ima prvi izvod za svako $x \neq 0$, i važi

$$f'(x) = 2x \cdot \operatorname{sgn} x = 2|x|, \quad x \neq 0.$$

Pokažimo sada da prvi izvod funkcije f u tački nula takodje postoji:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \cdot \operatorname{sgn} h - 0}{h} = 0.$$

(iii) Funkcija $f' : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je neprekidna u nuli, jer je

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}(2|x|) = 0 = f'(0).$$

b) (i) Funkcija f je neprekidna na skupu $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Primetimo da ne treba ispitivati neprekidnost u nuli jer u toj tački funkcija f nije ni definisana.

(ii) Važi $f(x) = \ln(x \operatorname{sgn} x),\ x \neq 0$, pa je

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \operatorname{sgn} x} \operatorname{sgn} x = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

(iii) Funkcija f', definisana sa $f'(x) = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$, je neprekidna na svom domenu, ali nije uniformno neprekidna na (na primer) intervalu $(0,1)$.

c) (i) Funkcija je neprekidna na $\mathbf{R}$.

(ii) Kako je $f(x) = |(x+2)^2(x-1)^3| = (x+2)^2(x-1)^3 \operatorname{sgn}(x-1),\ x \in \mathbf{R}$, to je prvi izvod f za $x \neq 1$ dat sa

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+2)(x-1)^3 \operatorname{sgn}(x-1) + (x+2)^2 3(x-1)^2 \operatorname{sgn}(x-1) \\ &= (x+2)(5x^2 - x - 4)|x-1|. \end{aligned}$$

Funkcija f takodje ima prvi izvod u tački $x = 1$. Ustvari, njen levi izvod u tački 1 je jednak

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0-} \frac{|((1+h)+2)^2((1+h)-1)^3| - 0}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{(3+h)^2|h|^3}{h} = 0,$$

a takodje je i njen desni izvod u tački 1 jednak 0. To znači da je $f'(1) = 0$.

(iii) Funkcija f' je neprekidna na skupu $\mathbf{R}$ i važi

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1}(x+2)(5x^2 - x - 4)|x-1| = 0 = f'(1).$$

d) (i) Neprekidnost funkcije f na skupu $\mathbf{R}$ sledi iz sledećeg tvrdjenja.

Ako je funkcija $f : A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ neprekidna na svom domenu, tada je i funkcija $|f|$, data sa $|f|(x) := |f(x)|,\ x \in A$, takodje neprekidna na A.

Obrnuto tvrdjenje ne mora biti tačno.

(ii) Kao u c), imamo

$$f'(x) = 3\cos^2 x(-\sin x) \cdot \operatorname{sgn}(\cos x) = -\frac{3}{2}\sin(2x)|\cos x|,$$

za svako $x \in \mathbf{R}$.

(iii) Funkcija f' je neprekidna na skupu $\mathbf{R}$.

e) (i) U zadatku 5.15 d) je pokazano da je funkcija f neprekidna na $\mathbf{R}$.

(ii) i (iii) Za $x \neq 0$ važi $f'(x) = \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$.

Kako granična vrednost

$$\lim_{h\to 0} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$$

ne postoji, to funkcija f nema prvi izvod u tački 0.

(iii) Prvi izvod date funkcije je neprekidna funkcija na skupu $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

f) (i) Funkcija f je neprekidna na $\mathbf{R}$.

(ii) Za $x \neq 0$ važi $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, dok za $x = 0$ imamo

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0, \qquad (6.13)$$

što znači da f' postoji na $\mathbf{R}$.

(iii) Funkcija f' je neprekidna na $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Kako granična vrednost

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

ne postoji, to funkcija f' ima prekid druge vrste u tački 0.

Primedba. Funkcija f' koja se dobija kao izvod neke funkcije nema nikad prekid prve vrste, ali, kako smo videli u zadatku pod f), može imati prekid druge vrste.

g) Slično kao u e) i f), sledi da je funkcija f neprekidna na $\mathbf{R}$ za $\alpha > 0$, izvod funkcija f' postoji za $\alpha > 1$ na $\mathbf{R}$, i, konačno, f' je neprekidna funkcija na $\mathbf{R}$ za $\alpha > 2$.

6.12. *Odrediti najveće skupove na kojima postoje prvi izvodi sledećih funkcija:*

a) $$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x < 2; \\ (2 - x)(3 - x), & 2 \leq x \leq 3; \\ -(3 - x), & x > 3; \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & |x| \leq 1; \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{|x| - 1}{2}, & |x| > 1; \end{cases}$$

c) $$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \leq 0; \\ e^{-1/x} + 1, & x > 0; \end{cases}$$

d) $$f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \sin \frac{\pi}{x} \right|, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

e) $$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q}; \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Rešenja.

a) Na osnovu jednakosti

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = 0 = f(2) \quad \text{i} \quad \lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3+} f(x) = 0 = f(3),$$

sledi da je funkcija f neprekidna u tačkama 2 i 3, pa je, dakle, neprekidna na celom skupu $\mathbf{R}$. Kako je

$$f'_-(2) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{2 - (h + 2) - 0}{h} = -1 \quad \text{i}$$

$$f'_+(2) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{(2 - (2 + h))(3 - (2 + h)) - 0)}{h} = -1,$$

to $f'(2)$ postoji i ima vrednost -1. Slično pokazujemo da je $f'_-(3) = f'_+(3) = 1$, pa je $f'(3) = 1$. To znači da funkcija f' (prvi izvod funkcije f) postoji na $\mathbf{R}$ i važi

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 2; \\ 2x - 5, & 2 < x < 3; \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

b) Funkcija f je neprekidna na $\mathbf{R}$. Kako je

$$\begin{aligned} f'_+(-1) &= \lim_{h \to 0+} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\operatorname{arctg}(-1 + h) + \frac{\pi}{4}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \operatorname{arctg} \frac{-1 + h + 1}{1 - (-1 + h)} = \frac{1}{2}, \\ f'_-(-1) &= \lim_{h \to 0-} \frac{f(-1 + h) - f(-1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0-} \frac{\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(-1 + h) + \frac{|-1 + h| - 1}{2} - (-\frac{\pi}{4})}{h} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

to funkcija f nema prvi izvod u tački -1. Analogno dobijamo $f'_-(1) = f'_+(1) = \frac{1}{2}$, pa $f'(1)$ postoji i jednako je $\frac{1}{2}$. Konačno je

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + x^2}, & -1 < x \leq 1; \\ -1/2, & x < -1; \\ 1/2, & x > 1. \end{cases}$$

c) Pokažimo prvo sledeću jednakost:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{-1/x}}{x^m} = 0, \quad m = 0, 1, \ldots$$

Ako stavimo $t := \frac{1}{x}$, tada $t \to +\infty$ kada $x \to 0+$. Prema tome je

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-1/x}}{x^m} = \lim_{t\to+\infty} t^m e^{-t} = 0. \tag{6.14}$$

(Lakši način da se pokaže poslednja relacija jeste da se $m-$puta primeni Lopitalovo pravilo, videti poglavlje 6.4.)

Funkcija f je neprekidna na skupu $\mathrm{R} \setminus \{0\}$. Iz (6.14) za $m = 0$ sledi

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{-1/x} + 1 = 1,$$

a kako je $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 1 = f(0)$, to sledi da je f takodje neprekidna funkcija u tački $x = 0$.

Ako u (6.14) stavimo $m = 1$, onda dobijamo

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{(e^{-1/h} + 1) - 1}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{e^{-1/h}}{h} = 0.$$

Takodje je $f'_-(0) = 0$, pa funkcija f ima prvi izvod u tački 0. Tako dobijamo

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \le 0; \\ \dfrac{e^{-1/x}}{x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Primetimo da je f' neprekidna funkcija na R.

d) Lako se pokazuje da je funkcija f neprekidna na skupu R. Njen prvi izvod je

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\left|\sin\dfrac{\pi}{x}\right| - \pi\cos\dfrac{\pi}{x}\,\mathrm{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right), & x \ne 0,\ x \ne 1/k,\ k \in \mathrm{Z}\setminus\{0\}; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

U tačkama $x_k = 1/k$, $k \in \mathrm{Z} \setminus \{0\}$, funkcija f nema prvi izvod.

e) Funkcija je neprekidna u tački 0, jer je $|f(x)| \le |x|$ za svako $x \in \mathrm{R}$. U drugim realnim tačkama funkcija f nije neprekidna (može se pokazati analogno kao u zadatku 5.10 b)).

Pokazaćemo sada da data funkcija nije diferencijabilna ni u tački nula. Ako stavimo

$$Q(h) := \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h},$$

tada je

$$Q(h) = \begin{cases} 1, & h \in \mathbf{Q}; \\ 0, & h \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Prema tome, $f'(0) = \lim_{h\to 0} Q(h)$ ne postoji. Dakle, prvi izvod date funkcije ne postoji ni za jedno $x \in \mathbf{R}$.

6.13. *Neka je domen funkcije f interval $(-\ell, \ell)$. Pokazati da tada važe sledeća tvrdjenja.*

1. *Ako je funkcija f neparna i neprekidna, tada je $f(0) = 0$.*
2. *Prvi izvod neparne (resp. parne) funkcije jeste parna (resp. neparna) funkcija.*

6.14. *Odrediti prvi izvod inverzne funkcije f^{-1} za funkciju f, datu sa*

a) $f(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbf{R}$; b) $f(x) = \sqrt{x} + 2$, $x > 0$;

c) $f(x) = x^2 - 2x$, $x > -1$; d) $f(x) = \cos x$, $x \in (0, \pi)$;

e) $f(x) = \mathrm{sh}\, x$, $x \in \mathbf{R}$; f) $f(x) = \mathrm{ch}\, x$, $x > 0$.

Rešenja.

a) **Prvi način.** Ako stavimo $y = f(x) = 2x + 1$, tada je $x = \frac{y-1}{2}$. Tako je funkcija $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$, $x \in \mathbf{R}$, inverzna za datu funkciju f. Prvi izvod f^{-1} je tada $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2}$, $x \in \mathbf{R}$.

Drugi način. Kako je $f'(x) = 2$ i $f'(f^{-1}(x)) = 2$, to iz formule (6.3) sledi

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

b) U ovom slučaju koristićemo drugi način iz a). Iz jednakosti

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0 \quad \text{i} \quad f^{-1}(x) = (x-2)^2,$$

dobijamo da je prvi izvod inverzne funkcije f^{-1} date funkcije f jednak

$$(f^{-1})'(x) = 2\sqrt{f^{-1}(x)} = 2(x-2), \quad x > 2.$$

c) Iz jednačine $x = f(y) = y^2 - 2y$, sledi $f'(y) = 2y - 2$. Tako je prvi izvod inverzne funkcije f^{-1} za f po promenljivoj y dat sa

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2y-2} = \frac{1}{2(y-1)}.$$

Na osnovu jednakosti $(y-1)^2 = x + 1$, možemo pisati

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}, \quad x > -1.$$

d) Iz $f'(x) = -\sin x$, $x \in (0, \pi)$, sledi

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) &= (\arccos x)' = -\frac{1}{\sin(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).\end{aligned}$$

e) Iz $f'(x) = \operatorname{ch} x$ sledi za $x \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned}(f^{-1})' = (\operatorname{arcsh} x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arcsh} x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arcsh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

f) $(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1.$

6.15. *Odrediti domene i prve izvode za inverzne funkcije sledećih funkcija:*

a) $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$;   b) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, $x < 0$.

Rešenja.

a) Za $x > 0$ važi $f'(x) = y'_x = \dfrac{x+1}{x} > 0$, što znači da postoji jedinstveno odredjena funkcija f^{-1} inverzna za funkciju f, čiji je domen B jednak kodomenu funkcije f. Ustvari je $B = \mathbf{R}$; analitičku formulu za f^{-1} ne možemo eksplicitno odrediti, ali ipak možemo naći njen prvi izvod. Iz relacije (6.3) sledi:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1},$$

gde je $x = x(y)$ rešenje po x jednačine $y = x + \ln x$.

b) Za $x < 0$ važi $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, što znači da postoji jedinstvena funkcija f^{-1} za f sa domenom $(0,1) = f((-\infty, 0))$. Njen izvod je

$$(f^{-1})'(y) = \frac{(1+x^2)^2}{2x} = \frac{x^3}{2y^2},$$

gde je $x = x(y)$ rešenje po x jednačine $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

6.16. *Pokazati da postoji jedinstvena diferencijabilna funkcija na* $\mathbf{R}$ *takva da je*

$$y^3 + 2y = x, \quad y(3) = 1, \tag{6.15}$$

i odrediti njen prvi izvod y'_x.

Rešenje. Postojanje funkcije $y = y(x)$ sledi iz teoreme o implicitnim funkcijama, koja nije spomenuta u ovoj knjizi. Medjutim u ovom slučaju možemo pokazati postojanje takve funkcije i na sledeća dva načina. Neka je funkcija F data sa $F(x,y) = y^3 + 2y - x$. Primetimo da za svako fiksno $y \in \mathbf{R}$ F ima izvod F'_x (po x) za sve $x \in \mathbf{R}$, a takodje za svako fiksno $x \in \mathbf{R}$ F izvod F'_y (po y) za sve $y \in \mathbf{R}$.

- **Prvi način.** Posle diferenciranja jedančine $F(x,y) = 0$ po y dobijamo
$$x'_y = 2 + 3y^2 > 0.$$
(x je ustvari funkcija od y.) Prema tome, inverzna funkcija za funkciju $x = x(y)$ postoji i takodje je diferencijabilna na $\mathbf{R}$. Tada važi (vidi (6.3))
$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{2+3y^2}.$$
Pretpostavimo da postoje dva rešenja jednačine (6.15) i označimo ih sa $y_1(x)$ i $y_2(x)$. Tada je
$$y_1^3 + 2y_1 = x \quad \text{i} \quad y_2^3 + 2y_2 = x.$$
To znači da je
$$y_1^3 - y_2^3 + 2(y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow (y_1 - y_2)(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 + 2) = 0.$$
Kako je $y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2 + 2 > 0$ za bilo koje y_1 i y_2, to je $y_1(x) = y_2(x)$ za svako $x \in \mathbf{R}$.

- **Drugi način.** Diferencirajmo po x jedančinu (6.15), pretpostavljajući da je $y = y(x)$. Tada imamo
$$3y^2 \cdot y'_x + 2 \cdot y'_x = 1.$$
Rešavajući po y'_x, ponovo dobijamo $y'_x = \dfrac{1}{2+3y^2}$.

6.17. *Odrediti prve izvode sledećih funkcija $y = y(x)$ datih implicitno:*

a) $x^2 + y^2 = 4$; b) $2x - 3y + 3 = x^2 + 2y - 6x$;

c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5x$; d) $x^4 + 4x^2y^2 - 3xy^3 + 3x = 0$;

e) $(y^2 - 9)^3 = (2x^3 + 3x - 1)^2$; f) $(2 + xy)^2 = 3x^2 - 7$.

Rešenja.

a) Posle diferenciranja date jednačine po x (zbog $(y^2)'_x = 2yy'$), dobijamo

$$2x + 2yy' = 0 \quad \text{ili} \quad y' = -x/y.$$

b) Iz $2 - 3y' = 2x + 2y' - 6$ sledi $y' = \dfrac{-2x + 8}{5}$.

c) Kako je $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{y'}{2\sqrt{y}} = 5$, to je $y' = 10\sqrt{y} - \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$.

d) Prvo imamo $4x^3 + 8xy^2 + 8x^2yy' - 3y^3 - 9xy^2y' + 3 = 0$, što povlači

$$y' = \frac{-4x^3 - 8xy^2 + 3y^3 - 3}{8x^2y - 9xy^2}.$$

e) U ovom slučaju je $6(y^2 - 9)^2yy' = 2(2x^3 + 3x - 1)(6x^2 + 3)$, odakle je

$$y' = \frac{(2x^3 + 3x - 1)(2x^2 + 1)}{y(y^2 - 9)^2}.$$

f) Kako je $2(2 + xy)(y + xy') = 6x$, to je $y' = \dfrac{3x - 2y - xy^2}{x(2 + xy)}$.

6.18. *Odrediti prve izvode sledećih parametarskih funkcija, datih sa:*

a) $x = t^2 + 2t$, $y = 2t^3 - 6t$, $t \in \mathrm{R}$;

b) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $t \in \mathrm{R}$;

c) $x = 2\cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Rešenja.

a) Iz $x'_t = 2t + 2$, $y'_t = 6t^2 - 6$, i relacije (6.6) sledi

$$y'_t = \frac{6t^2 - 6}{2t + 2} = \frac{3t^2 - 3}{t + 1}, \quad t \neq -1.$$

b) Iz relacija $x'_t = 2(1 - \cos t)$, $y'_t = 2\sin t$, $t \in \mathrm{R}$, sledi

$$y' = \frac{\sin t}{(1 - \cos t)}, \quad t \in \mathrm{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathrm{Z}\}.$$

c) Kako je $x'_t = 6\cos^2 t(-\sin t)$, $y'_t = 3\sin^2 t\cos t$, to je

$$y' = \frac{3\sin^2 t\cos t}{-6\cos^2 t\sin t} = \frac{-1}{2\operatorname{ctg} t}, \quad t \in (0, \pi/2).$$

6.19. *Odrediti diferencijale sledećih funkcija:*

a) $f(x) = 2\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}} + \ln(x^2 + 1)$; b) $f(x) = \dfrac{\sin x + \operatorname{tg} x}{x^3 + 3^x + 3x}$;

c) $f(x) = 5\operatorname{arctg}(2x + 7)e^{3x+1} + 12^x$;

d) $y = \arcsin(5x^4 + 2) + \dfrac{5^x + 4x^2}{\exp(\sin x + \cos x)}$.

Rešenja.

a) Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^2\sqrt{\cos\frac{1}{x}}} + \dfrac{2x}{1 + x^2}$, pa je (vidi relaciju (6.8)) diferencial of f u tački x iz domena funkcije f dat sa

$$df(x) = f'(x)\,dx = \left(\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2\sqrt{\cos\frac{1}{x}}} + \frac{2x}{1 + x^2}\right)dx.$$

b) U ovom slučaju imamo

$$df(x) = \frac{(\cos x + 1/\cos^2 x)(x^3 + 3^x + 3x) - (\sin x + \operatorname{tg} x)(3x^2 + 3^x\ln 3 + 3)}{(x^3 + 3^x + 3x)^2}\,dx.$$

c) Iz (6.8), sledi

$$df(x) = \left(5 \cdot \frac{2}{1 + (2x + 7)^2}e^{3x+1} + 15 \cdot \operatorname{arctg}(2x + 7)e^{3x+1} + 12^x\ln 12\right)dx.$$

d) Diferencijal funkcije f u tački x domena od f je

$$df(x) = \left(\frac{20x^3}{\sqrt{1 - (5x^4 + 2)^2}} + \frac{(5^x\ln 5 + 8x) - (5^x + 4x^2)(\cos x - \sin x)}{\exp(\sin x + \cos x)}\right)dx.$$

6.20. *Ako je $f(x)=\sqrt[m]{u^2+v^2}$, gde je $m\in\mathbb{N}$, $m>1$, i ako su $u=u(x)$ i $v=v(x)$ diferencijabilne funkcije promenljive x, odrediti diferencijal $df(x)$.*

Rešenje. Iz (6.8), dobijamo

$$\begin{aligned} df(x) &= d\left(\sqrt[m]{u^2+v^2}\right)=\frac{1}{m}(u^2+v^2)^{(1-m)/m}d(u^2+v^2)\\ &= \frac{2}{m}(u^2+v^2)^{(1-m)/m}(u\,du+v\,dv). \end{aligned}$$

6.21. *Odrediti približnu vrednost broja A, ako je njegova tačna vrednost data sa*

a) $A=\sqrt{4,0003}$; b) $A=\ln(1,001)$; c) $A=\sqrt[3]{1,0003}$.

Rešenja.

a) Za funkciju $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$, je njen prvi izvod $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$, pa za $x=4$, $h=0,0003$, iz formule (6.8) sledi

$$\sqrt{4,0003}\approx\sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}0,0003=2+\frac{0,0003}{4}=2,000075.$$

b) Ako $h=0,001$, $x=1$; tada je

$$\ln(1,001)\approx\ln 1+\frac{1}{1}0,001=0,001.$$

c) U ovom slučaju imamo $h=0,0003$, $x=1$, pa je

$$\sqrt[3]{1,0003}\approx\sqrt[3]{1}+\frac{1}{3\sqrt[3]{1}}0,0003=1,0001.$$

6.22. *Pokazati približnu formulu*

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{n\,a^{n-1}}, \tag{6.16}$$

gde je $a>0$, $n\in\mathbb{N}$, dok broj x zadovoljava uslov $|x|\ll a^n$ (tj. $|x|$ je mnogo manji od a^n).

Rešenje. Ako je $f(x):=\sqrt[n]{a^n+x}$, tada je

$$f'(0)=\frac{1}{n}(a^n+x)^{(1-n)/n}\Big|_{x=0}=\frac{1}{n\,a^{n-1}}.$$

Kako je f diferenciabolne funkcija u 0, to sledi

$$f(x)-f(0)=\frac{x}{n\,a^{n-1}}+x\cdot r(x), \tag{6.17}$$

gde ostatak za r važi $\lim\limits_{x\to 0}r(x)=0$ (videti definiciju 6.2 i teoremu 6.1). Zamenom $x\cdot r(x)$ u (6.17), dobijamo formulu (6.16), koja važi ako je $|x|$ mnogo manje od a^n.

6.23. *Pokazati sledeće formule za "malo" $|x|$:*

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\approx 1+\dfrac{x}{3}$; b) $\sin x\approx x$; c) $\cos x\approx 1$.

6.24. *Pretpostavimo da su funkcije $u=u(x)$ i $v=v(x)$ n puta diferencijabilne na intervalu (a,b), gde je $n\in\mathbb{N}$. Tada važi* **Lajbnicova formula**,

$$(u(x)\cdot v(x))^{(n)}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}u^{(j)}(x)v^{(n-j)}(x),\quad x\in(a,b) \tag{6.18}$$

(gde koristimo uobičajenu konvenciju $u^{(0)}(x):=u(x)$).

Rešenje. Za $n=1$ dobija se poznata relacija za izvod proizvoda dve funkcije. Neka je relacija (6.18) tačna za $n=k$; tada za $n=k+1$ važi

$$\begin{aligned} (u(x)\cdot v(x))^{(k+1)} &= \left((u(x)\cdot v(x))^{(k)}\right)'=\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}u^{(j)}(x)v^{(k-j)}(x)\right)'\\ &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}u^{(j+1)}(x)v^{(k-j)}(x)+\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}u^{(j)}(x)v^{(k-j+1)}(x)\\ &= \binom{k}{0}u'(x)v^{(k)}(x)+\binom{k}{1}u''(x)v^{(k-1)}(x)+\cdots+\binom{k}{k-1}u^{(k)}(x)v'(x)\\ &\quad+\binom{k}{k}u^{(k+1)}(x)v(x)+\binom{k}{0}u(x)v^{(k+1)}(x)+\binom{k}{1}u'(x)v^{(k)}(x)+\cdots\\ &\quad+\binom{k}{k-1}u^{(k-1)}(x)v''(x)+\binom{k}{k}u^{(k)}(x)v'(x)\\ &= \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}u^{(j)}(x)v^{(k+1-j)}(x),\quad x\in(a,b). \end{aligned}$$

Prema principu matematičke indukcije, formula (6.18) je tačna za sve $n\in\mathbb{N}$.

U prethodnom izvodjenu koristili smo jednakost

$$\binom{k}{j} + \binom{k}{j+1} = \binom{k+1}{j+1}, \quad k \in \mathbf{N},\ 0 \le j \le k-1.$$

6.25. *Neka je funkcija f tri puta diferencijabilna na svom domenu. Odrediti g'' i g''', ako je funkcija g data sa:*

a) $g(x) = f(x^2)$; b) $g(x) = f(1/x)$; c) $g(x) = f(e^x)$; d) $g(x) = f(\ln x)$.

Rešenja.

a) Na osnovu pravila o izvodu složene funkcije sledi

$$g'(x) = 2x f'(x^2), \qquad g''(x) = 4x^2 f''(x^2) + 2f'(x^2),$$

$$g'''(x) = 8x^3 f'''(x^2) + 12x f''(x^2).$$

b) $$g'(x) = -\frac{1}{x^2} f'(1/x), \qquad g''(x) = \frac{2}{x^3} f'(1/x) + \frac{1}{x^4} f''(1/x),$$

$$g'''(x) = -\frac{1}{x^6} f'''(1/x) - \frac{6}{x^5} f''(1/x) - \frac{6}{x^4} f'(1/x).$$

c) $$g''(x) = e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x),$$

$$g'''(x) = e^{3x} f'''(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x).$$

d) $$g''(x) = \frac{1}{x^2}\left(f''(\ln x) - f'(\ln x)\right),$$

$$g'''(x) = \frac{1}{x^3}\left(f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)\right).$$

6.26. *Pokazati da koeficijenti a_j, $0 \le j \le n$, polinoma*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbf{R},$$

zadovoljavaju jednakost $a_j = \dfrac{P_n^{(j)}(0)}{j!}$, $0 \le j \le n$.

Uputstvo. Odrediti $P_n^{(j)}(x)$ za $0 \le j \le n$, pa u dobijenu jednakost staviti $x = 0$.

6.27. *Odrediti j-te izvode ($j \in \mathbf{N}$) sledećih funkcija:*

a) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$; b) $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbf{R}$;

c) $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$; d) $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$;

e) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $|x| < 1$; f) $f(x) = \ln(1+x)$; $|x| < 1$.

Odrediti $f^{(j)}(0)$ za $j \in \mathbf{N}$.

Rešenja.

a) Kako je $f'(x) = e^x$ za svako $x \in \mathbf{R}$, to na osnovu principa matematičke indukcije po $j \in \mathbf{N}$ imamo $f^{(j)}(x) = e^x$ za sve $j \in \mathbf{N}$. Prema tome je $f^{(j)}(0) = 1$ za sve $j \in \mathbf{N}$.

b) Slično kao pod a), imamo $f^{(j)}(x) = 2^x \ln^j 2$, za svako $x \in \mathbf{R}$ i $j \subset \mathbf{N}$. Prema tome je $f^{(j)}(0) = \ln^j 2$, $j \in \mathbf{N}$.

c) Ako je $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$, tada je $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$. Iz jednakosti

$$f(x) = f^{(4)}(x) = \sin x, \quad x \in \mathbf{R},$$

sledi da za svako $x \in \mathbf{R}$ i svako $j \in \mathbf{N}_0$ važi

$$f^{(4j)}(x) = \sin x,\ f^{(4j+1)}(x) = \cos x,\ f^{(4j+2)}(x) = -\sin x,\ f^{(4j+3)}(x) = -\cos x,$$

ili $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbf{N}$. Tako je za $j \in \mathbf{N}_0$

$$f^{(4j)}(0) = f^{(4j+2)}(0) = 0, \quad f^{(4j+1)}(x) = 1, \quad f^{(4j+3)}(x) = -1.$$

d) Analogno kao u c), za svako $x \in \mathbf{R}$ i svako $j \in \mathbf{N}_0$ imamo

$$f^{(4j)}(x) = \cos x,\ f^{(4j+1)}(x) = -\sin x,\ f^{(4j+2)}(x) = -\cos x,\ f^{(4j+3)}(x) = \sin x,$$

ili $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbf{N}$. Posebno je

$$f^{(4j)}(0) = 1, \quad f^{(4j+2)}(0) = -1, \quad f^{(4j+1)}(0) = f^{(4j+3)}(0) = 0.$$

e) Proveriti da za svako $j \in \mathbf{N}$ važi $f^{(j)}(x) = \dfrac{j!}{(1-x)^{j+1}}$, $|x| < 1$. Dakle, za svako $j \in \mathbf{N}$ važi $f^{(j)}(0) = j!$.

f) Prvi i drugi izvod funkcije $f(x) = \ln(1+x)$, $|x| < 1$, je

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{i} \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad |x| < 1.$$

Pomoću matematičke indukcije pokazuje se da za svako $j \in \mathbb{N}$ i $|x| < 1$ važi

$$f^{(j)}(x) = \frac{(-1)^{j-1}(j-1)!}{(1+x)^j}$$

i da je $f^{(j)}(0) = (-1)^{j-1}(j-1)!$.

6.28. *Odrediti n−te izvode sledećih funkcija:*

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x - 2}$, $x \notin \{1, 2\}$; b) $f(x) = \sin^2 x$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, $x \in \mathbb{R}$; d) $f(x) = \ln \dfrac{a + bx}{a - bx}$, $a^2 - b^2x^2 > 0$.

Rešenja.

a) Na osnovu jednakosti $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x - 2} = \dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{1}{x - 1}$, za $x \notin \{1, 2\}$ sledi $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left(\dfrac{1}{(x-2)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$.

b) Iz jednakosti $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$, sledi $f^{(n)}(x) = 2^{n-1}\cos(2x + n\pi/2)$. Uporediti sa zadatkom 6.27 pod c) i d).

c) Iz $f(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x$, sledi $f^{(n)}(x) = 4^{n-1}\cos(4x + n\pi/2)$, $n \in \mathbb{N}$.

d) Iz $f'(x) = \dfrac{b}{a + bx} + \dfrac{b}{a - bx}$ dobijamo

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,b^n}{(a+bx)^n} + \frac{(n-1)!\,b^n}{(a-bx)^n}, \quad \text{za } n \in \mathbb{N},\ a^2 - b^2x^2 > 0.$$

6.29. *Odrediti n−te izvode sledećih funkcija:*

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$, $|x| < 1$; b) $f(x) = \ln(1 - x)$, $|x| < 1$;

c) $f(x) = \sin^3 x$, $x \in \mathbb{R}$; d) $f(x) = \sin^2 2x \cos 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

Rezultati. a) $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. b) $f^{(n)}(x) = \dfrac{-(n-1)!}{(1-x)^n}$.

6.30. *Pokazati da je funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

beskonačno diferencijabilna na $\mathbb{R}$, *i da važi* $f^{(n)}(0) = 0$ *za sve* $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje. Data funkcija je diferencijabilna za sve vrednosti $x \in \mathbb{R}$, izuzev možda u tački $x = 0$. Funkcija f je neprekidna u nuli, jer je

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} e^{-1/x} = \lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 0 = 0 = f(0).$$

Za $x > 0$ imamo $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-1/x}$, $f''(x) = \left(\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{2}{x^3}\right)e^{-1/x}$ i

$$f'''(x) = \left(\frac{1}{x^6} - \frac{6}{x^5} + \frac{6}{x^4}\right)e^{-1/x}.$$

Ostavljamo čitaocu da proveri da je

$$f^{(n)}(x) = Q_{2n}(1/x)e^{-1/x},$$

gde je $Q_{2n}(x)$ polinom stepena $2n$ takav da je $Q_{2n}(0) = 0$. Prema tome imamo

$$\lim_{x\to 0+} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0+} Q_{2n}(1/x)e^{-1/x} = \lim_{t\to+\infty} Q_{2n}(t)e^{-t} = 0.$$

Iz $f^{(n)}(x) = 0$ za sve $x < 0$, sledi da je

$$\lim_{x\to 0-} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to 0-} 0 = 0,$$

što znači da su i levi i desni izvod funkcije $f^{(n)}$ u 0 jednaki nuli.

Potrebno je još pokazati da postoji $f^{(n)}(0)$. Jasno je da je $f_-^{(n)}(0) = 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dalje imamo

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{e^{-1/h}}{h} = 0.$$

Pod pretpostavkom da je $f_+^{(n)}(0) = 0$ za neko $n \in \mathbb{N}$, imamo

$$\begin{aligned} f_+^{(n+1)}(0) &= \lim_{h\to 0+} \frac{f^{(n)}(0+h) - f^{(n)}(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}Q_{2n}(1/h)e^{-1/h} = 0. \end{aligned}$$

Na osnovu principa matematičke indukcije sledi da je $f_+^{(n)}(0) = 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, odakle sledi postojanje $f^{(n)}$ na $\mathbb{R}$.

Primedba. Ovaj primer pokazuje da postoji beskonačno diferencijabilna funkcija čiji je Maklorenov polinom bilo kog stepena identički jednak nuli, i pored toga što vrednost funkcije nije identički jednaka nuli.

6.31. *Odrediti jednačine tangente i normale grafika u tački $T(x_0, f(x_0))$ sledećih funkcija:*

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$; b) $f(x) = e^{x^2-1}$, $x_0 = 1$;

c) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$, $x_0 = 0$; d) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+2}{2}\right)$, $x_0 = 0$.

Rešenja.

a) Jednačina prave sa nagibom (koeficijentom pravca) k koja prolazi kroz tačku $T(x_0, y_0)$ ima oblik

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0).$$

Geometrijska interpretacija prvog izvoda u tački x_0 je da je nagib k tangente grafika funkcije f u tački $T(x_0, y_0)$ jednak vrednosti prvog izvoda funkcije f u x_0, tj. $k = f'(x_0)$ (videti relaciju (6.12)).

Prvi izvod funkcije f u tački x je $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pa ako stavimo $x_0 = 4$, dobijamo $f'(4) = 1/4$. Vrednost funkcije f u tački $x_0 = 4$ je $y_0 = f(4) = 2$. Tako je jednačina tražene tangente oblika

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4), \quad \text{ili} \quad 4y - x = 4.$$

Jednačina normale grafika funkcije f u tački $T(x_0, y_0)$ je oblika (relacija (6.11))

$$y - y_0 = k_1 \cdot (x - x_0),$$

gde je $k_1 = -\dfrac{1}{k}$, pod uslovom da nagib tangente $k (= f'(x_0))$ nije nula. U našem slučaju je $k_1 = -4$, što daje jednačinu normale grafika funkcije u tački $T(4, 2)$, koja je oblika

$$y + 4x = 18.$$

b) Prvi izvod date funkcije je $f'(x) = 2xe^{x^2-1}$, odakle je nagib tangente $k = f'(1) = 2$. Jednačina tangente je $y - 1 = k(x - 1)$, tj. $y - 1 = 2(x - 1)$, ili

$$y - 2x + 1 = 0.$$

Jednačina normale grafika funkcije f u tački $T(1, 1)$ je oblika

$$2y + x - 3 = 0.$$

c) Iz $y' = \dfrac{2x}{1 + x^4}$ sledi da je $y'(0) = 0$. Prema tome, jednačina tangente je

$$y - 0 = 0 \cdot (x - 0), \quad \text{odnosno } y = 0.$$

Ustvari, tražena tangenta je $x-$osa, dok je normala grafika funkcije f u tački $T(0, 0)$ $y-$osa, čija je jednačina $x = 0$.

d) Domen funkcije f je interval $[-4, 0)$, jer je apsolutna vrednost argumenta funkcije arcsin manja ili jednaka 1. Lako se pokazuje da je funkcija f neprekidna sa leve strane u tački 0.

Funkcija f nema levi izvod u tački 0, jer je

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{\arcsin\left(\dfrac{h+2}{2}\right) - \arcsin 1}{h}$$

$$= \lim_{t\to \pi/2-} \frac{t - \pi/2}{2(\sin t - 1)} = \lim_{z\to 0-} \frac{z}{2(\cos z - 1)} = \lim_{z\to 0-} \frac{z}{-4(\sin^2(z/2))} = +\infty.$$

Znači, tražena tangenta je ustvari $y-$osa, čija je jednačina $x = 0$.

Jednačina normale u tački $T(0, \frac{\pi}{2})$ je $y = 0$, što je ustvari $x-$osa.

6.32. *Odrediti parametar k tako da prava $y = kx + 1$ bude tangenta parabole*

$$\{(x, y) |\ y^2 = 4x,\ x \geq 0\},$$

i odrediti tačke dodira.

Rešenje. Data kriva jeste grafik dve funkcije,

$$f_1(x) = 2\sqrt{x},\ x \geq 0, \quad \text{i} \quad f_2(x) = -2\sqrt{x},\ x \geq 0.$$

Označimo sa $T(x_0, y_0)$, $x_0 > 0$, zajedničku tačku tangente i parabole. Tada je $y_0 = \pm 2\sqrt{x_0}$ i $k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}$. To daje

$$y_0 = kx_0 + 1 \Rightarrow 2\sqrt{x_0} = \frac{1}{\sqrt{x_0}}x_0 + 1.$$

Tako dobijamo $x_0 = 1$, pa je zajednička tačka tangente i parabole f_1 tačka $T(1, 2)$. Dakle, jednačina jedne tražene tangente je $y = x + 1$.

U drugoj tački tangenta ne postoji, jer je

$$-2\sqrt{x_0} = -\frac{1}{\sqrt{x_0}}x_0 + 1 \Rightarrow \sqrt{x_0} = -1 < 0,$$

što je kontradikcija. U tački $x = 0$, grafik funkcije f_2, dakle i data parabola, imaju vertikalnu tangentu.

zadovoljava uslove Rolove teoreme, što znači da je neprekidna na zatvorenom intervalu [a,b], ima konačan prvi izvod na otvorenom intervalu (a,b) i važi $F(a) = F(b)$. Znači, postoji tačka $c \in (a,b)$ takva da je $F'(c) = f'(c) = 0$.

Ako je interval (a,b) beskonačan, tada posmatrajmo prave $y = C + \varepsilon$ i $y = C - \varepsilon$. Ako je $\varepsilon > 0$ dovoljno malo, tada bar jedna od ovih pravih preseca krivu f u (najmanje) dve tačke sa apscisama a_1 i a_2. Funkcija f zadovoljava uslove Rolove teoreme na $[a_1, a_2] \subset (a,b)$, što povlači da postoji tačka $c \in (a,b)$ takva da je $f'(c) = 0$.

Primedba. Tvrdjenje zadatka 6.40 važi i ako je granična vrednost u relaciji (6.22) $+\infty$ ili $-\infty$.

6.41. *Pokazati da*

a) *Lagerov polinom,* $L_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$, *ima tačno* n *pozitivnih korena;*

b) *Čebišev-Hermitov polinom,* $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$, *ima* n *realnih korena;*

c) *jednačina*

$$(1+x^2)^n \frac{d^n}{dx^n}\left((1+x^2)^{-1}\right) = 0,$$

ima n *realnih korena.*

Rešenja.

a) Funkcija $f(x) = x^n e^{-x}$ zadovoljava uslov

$$f(0) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Iz prethodnog primera sledi da postoji tačka $\xi_1 \in (0, +\infty)$ takva da je $f'(\xi_1) = 0$; takodje je $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Ponovnom primenom prethodnog postupka dobijamo tačke $\xi_2 \in (0, \xi_1)$ i $\xi_3 \in (\xi_2, +\infty)$ takve da je $f''(\xi_2) = f''(\xi_3) = 0$. Primetimo da je $f''(0) = 0$, i $\lim\limits_{x \to +\infty} f''(x) = 0$.

Nastavljajući ovaj postupak, dobijamo da funkcija $f^{(n-1)}(x)$ ima n realnih korena uključujući i tačku $x = 0$, dok $f^{(n)}(x)$ ima takodje n korena, jer je $f^{(n)}(0) \neq 0$. Prema tome, polinom $L_n(x) = e^x f^{(n)}(x)$ ima n pozitivnih nula.

b) Posmatrajmo funkciju $g(x) = e^{-x^2}$ na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Analogno kao u prethodnom zadatku, dobijamo da $g^{(n)}(x)$ ima n realnih korena. Zbog toga, i polinom $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} g^{(n)}(x)$ ima n realnih korena.

c) Primeniti postupak kao u b) na funkciju $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

6.42. *Diferencijabilna funkcija* f *je konstanta na intervalu* $[a,b]$ *ako i samo ako je njen prvi izvod* f' *jednak nuli u svakoj tački otvorenog intervala* (a,b).

Rešenje. Ako je funkcija konstanta na intervalu $[a,b]$, tada je njen prvi izvod jednak nuli na intervalu (a,b).

Neka je $f'(x) = 0$ za sve $x \in (a,b)$ i neka su x_1 i x_2 dve proizvoljne tačke intervala (a,b). Iz Lagranžove teoreme sledi da postoji tačka $\xi \in (x_1, x_2)$, dakle $\xi \in (a,b)$, takva da je

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2).$$

Na osnovu pretpostavke ($f'(x) = 0, \forall x \in (a,b)$) i poslednje relacije dobijamo $f(x_1) = f(x_2)$. Pošto je par x_1, x_2 bio proizvoljno izabran, to je funkcija f konstanta na intervalu (a,b).

6.43. *Ako su izvodi funkcija* $F_1(x)$ *i* $F_2(x)$ *na nekom intervalu jednaki, tj. važi*

$$F_1'(x) = F_2'(x), \quad x_1, x_2 \in (a,b),$$

tada je razlika te dve funkcije jednaka konstanti. Pokazati.

Rešenje. Ako označimo sa $f(x) = F_1(x) - F_2(x)$, tada važi $f'(x) = 0$ na intervalu (a,b). Iz zadatka 6.42 sledi da je na tom intervalu funkcija $f(x)$ konstanta.

6.44. *Neka je* f *diferencijabilna funkcija na intervalu* (a,b).

a) *Ako je prvi izvod funkcije* f *pozitivan (resp. nenegativan) na intervalu* (a,b), *tada je* f *monotono rastuća (resp. neopadajuća) na* (a,b).

b) *Ako je prvi izvod funkcije* g *negativan (resp. nepozitivan) na intervalu* (a,b), *tada je* f *monotono opadajuća (resp. nerastuća) na* (a,b).

Rešenje. Dovoljno je dokazati slučaj pod a). Pretpostavimo da je $f'(x) > 0$ za svako $x \in (a,b)$, (resp. $f'(x) \geq 0$) za sve $x \in (a,b)$. Ako su x_1, x_2 dve tačke iz datog intervala i $x_1 < x_2$, tada iz Lagranžove teoreme sledi da postoji tačka $\xi \in (x_1, x_2)$ takva da važi

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Kako je po pretpostavci prvi izvod funkcije f pozitivan (resp. nenegativan) na celom intervalu (a,b), iz zadnje relacije dobijamo

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad (\text{resp. } f(x_2) - f(x_1) \geq 0).$$

To znači da je funkcija f monotono rastuća (resp. neopadajuća) na (a,b).

6.45. Košijeva teorema.
Neka su funkcije f i g

- *neprekidne na zatvorenom intervalu $[a,b]$ i*
- *diferencijabilne na otvorenom intervalu (a,b).*

Ako je još i $g'(x) \neq 0$ za svako $x \in (a,b)$, tada postoji bar jedan broj $\xi \in (a,b)$ takav da je

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{6.23}$$

(Ako je $g(a) \neq g(b)$, tada uslov $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$, može biti zamenjen slabijim uslovom $f(x)'^2 + g(x)'^2 \neq 0$, $x \in (a,b)$.)

Rešenje. Ako $g'(x) \neq 0$, $x \in (a,b)$, tada iz zadatka 6.44 sledi da je funkcija g monotona na (a,b). Ako je g monotono rastuća na (a,b), tada postoji inverzna funkcija $x = x(t)$, definisana i diferencijabilna na intervalu $[\alpha,\beta]$, gde je $\alpha = g(a)$ i $\beta = g(b)$. Primetimo da je $g(a) < g(b)$.

Funkcija $f(x)$ se može pisati kao funkcija $f(x) = f(x(t))$, $t \in [\alpha,\beta]$; time je f diferencijabilna funkcija, kao kompozicija diferencijabilnih funkcija. Primenom Lagranžove teoreme (i izvoda složene funkcije) dobijamo

$$\frac{f(x(\beta)) - f(x(\alpha))}{\beta - \alpha} = f_i'(x(c))x_t'(c)$$

za neko $c \in (\alpha,\beta)$, ili

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x(c))}{g'(x(c))}.$$

Ako uzmemo $x(c) = \xi$, dobijamo tvrdjenje teoreme.

Primedba. Lagranžova teorema jeste poseban slučaj Košijeve teoreme, kada je funkcija g data sa $g(x) = x$.

6.46. *Ispitati da li se Košijeva teorema može primeniti na sledeće funkcije:*

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $x \in [-1,1]$;

b) $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = x^3$, $x \in [-1,1]$.

Rešenja.

a) Ne. Ustvari, iako je $g(-1) = -1 \neq 1 = g(1)$, ipak u tački $x = 0$ važi $f'(0)^2 + g'(0)^2 = 0$. Dakle, uslov $f'(x)^2 + g'(x)^2 \neq 0$, za sve $x \in [-1,1]$, nije zadovoljen.

b) Da. U ovom slučaju je $g(-1) = -1 \neq 1 = g(1)$, $f'(x) = 2x + 2$ i $g'(x) = 3x^2$, tako da važi $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$, za svako $x \in [-1,1]$. Odredimo tačku ξ koja zadovoljava uslov

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in (-1,1).$$

Pošto je $\dfrac{3+1}{1+1} = \dfrac{2\xi+2}{3\xi^2}$, ili $3\xi^2 - \xi - 1 = 0$, to dobijamo

$$\xi_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6} \in (-1,1) \quad \text{i} \quad \xi_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6} \in (-1,1).$$

6.47. *Pomoću Lagranžove teoreme dokazati sledeće nejednakosti:*

a) $|\sin ax - \sin ay| \leq |a| \cdot |x-y|$, $a \neq 0$, $x,y \in \mathbf{R}$;

b) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x-y|$, $x,y \in \mathbf{R}$;

c) $\dfrac{x-y}{x} < \ln\dfrac{x}{y} < \dfrac{x-y}{y}$, $0 < y < x$;

d) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, $x > 0$;

e) $e^x > 1 + x$, $x \in \mathbf{R}$;

f) $e^x > ex$, $x > 1$;

g) $n(b-a)a^{n-1} < b^n - a^n < n(b-a)b^{n-1}$, $0 < a < b$, $n \in \mathrm{N}$;

h) $\dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}} < \left(\dfrac{1}{(n-1)^\alpha} - \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$, $n \in \mathrm{N}$, $\alpha > 0$.

Rešenja.

a) Primenom Lagranžove teoreme na funkciju $f(t) = \sin at$, koja je neprekidna i diferencijabilna na proizvoljnom intervalu $[y,x]$, dobijamo da postoji tačka $\xi \in (y,x)$, takva da važi

$$\sin ax - \sin ay = a(x-y)\cos a\xi, \quad \text{odakle je}$$

$$|\sin ax - \sin ay| = |a| \cdot |\cos a\xi| \cdot |x-y| \leq |a| \cdot |x-y|.$$

b) Funkcija $f(t) = \operatorname{arctg} t$ je neprekidna i diferencijabilna na intervalu $[y,x]$, pa postoji tačka $\xi \in (y,x)$ sa osobinom da je

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \frac{x-y}{1+\xi^2}.$$

Odatle je

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| = \frac{|x-y|}{1+\xi^2} \le |x-y|.$$

c) Funkcija $f(x) = \ln x$ je neprekidna i diferencijabilna na intervalu $[y, x]$, $0 < y < x$, pa postoji tačka $\xi \in (y, x)$ takva da je

$$\ln x - \ln y = \frac{x-y}{\xi}. \tag{6.24}$$

Ako u (6.24) zamenimo ξ sa x, tj. sa većom vrednosti, to dobijamo levu stranu tražene nejednakosti. Analogno, zamenom ξ sa y u (6.24) dobijamo njenu desnu stranu.

d) Pomoću funkcije $f(t) = \ln(1+t)$ na intervalu $[0, x]$, i relacije

$$\frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x} = \frac{1}{1+\xi}, \text{ za } \xi \in (0, x), \text{ tj. } \frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+\xi} < 1,$$

dobijamo traženu nejednakost.

e) Funkcija $f(x) = e^x$ na intervalu $[0, x]$, $x > 0$ (resp. na $[x, 0]$, $x < 0$),) zadovoljava uslove Lagranžove teoreme. Zato je

$$\frac{e^x - e^0}{x} = e^\xi \Rightarrow e^x - 1 = xe^\xi.$$

- Ako je $x > 0$, tada je $\xi > 0$, pa je $e^\xi > 1$ i $e^x > 1 + x$.
- Ako je $x < 0$, tada je $\xi < 0$, pa je $e^\xi < 1$, ali $xe^\xi > x$, pa je nejednakst tačna.

f) Ako uzmemo istu funkciju kao u e) i interval $[1, x]$, dobijamo

$$\frac{e^x - e^1}{x-1} = e^\xi > e, \text{ za neko } \xi \in (1, x).$$

g) **Uputstvo.** Koristiti funkciju $y = t^n$ i interval $[a, b]$.

h) Ako uzmemo funkciju $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ na intervalu $[n-1, n]$, dobijamo traženu nejednakost.

6.48. *Ako je izvod funkcije f ograničen na intervalu (a, b), tada je f uniformno neprekidna funkcija na (a, b).*

Rešenje. Kako je funkcija f' ograničena na (a, b), to postoji broj $M > 0$ takav da je $|f'(x)| \le M$. Primenom Lagranžove teoreme, za svaki par tačaka $x_1, x_2 \in (a, b)$ možemo pisati

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)||x_1 - x_2| \le M|x_1 - x_2|, \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ dato. Ako stavimo $\delta := \dfrac{\varepsilon}{M}$, tada dobijamo

$$(\forall x_1, x_2 \in (a, b)) \ \ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

6.3 Tejlorova formula

Teorema 6.4. Tejlorova teorema. *Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[\alpha, \beta]$. Neka je, dalje, n pozitivan broj takav da su svi izvodi funkcije f do reda n neprekidni na $[\alpha, \beta]$ i postoji konačan izvod funkcije f reda $(n+1)$ na (α, β). Ako su a i x iz (α, β), tada postoji tačka ξ izmedju a i x takva da važi* **Tejlorova formula**

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \\ &\quad \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi). \end{aligned}$$

Tejlorov polinom reda n u tački a za funkciju f je polinom

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \\ &\quad \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \end{aligned}$$

Tako se Tejlorova formula može zapisati kao

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \tag{6.25}$$

gde je **ostatak** R_n dat sa

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi = a + \theta \cdot (x-a), \quad 0 < \theta = \theta(x) < 1.$$

Pomoću definicije 4.9 relacija (6.25) se može pisati kao

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n), \quad x \to a.$$

Za $a = 0$ dobijamo **Maklorenovu formulu**

$$\begin{aligned} f(x) = &\ f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(x) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \\ &\cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (0, b). \end{aligned}$$

Maklorenov polinom reda n za funkciju f je polinom

$$P_n(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0).$$

6.3.1 Zadaci

6.49. *Pokazati da je Tejlorov polinom za polinom $P_n(x)$ stepena n baš on sam.*

6.50. *Razviti polinom $f(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ po stepenima od $x - 2$.*

Rešenje. Iz $f(2) = -16$ i

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 - 6x + 7, \qquad f'(2) = -33$$
$$f''(x) = 12x^2 - 30x - 6 \qquad f''(2) = -18;$$
$$f'''(x) = 24x - 30, \qquad f'''(2) = 18, \qquad f^{(4)}(x) = 24, \qquad f^{(4)}(2) = 24,$$

sledi

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6 &= -16 - 33(x-2) - 18\frac{(x-2)^2}{2} \\ &+ 18\frac{(x-2)^3}{3!} + 24\frac{(x-2)^4}{4!}. \end{aligned}$$

Tako je

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6 &= -16 - 33(x-2) - 9(x-2)^2 \\ &+ 3(x-2)^3 + (x-2)^4. \end{aligned}$$

U ovom slučaju ostatak je jednak nuli, jer je peti izvod funkcije f identički jednak nuli.

6.51. *Primeniti Maklorenovu formulu za sledeće funkcije:*

a) $f(x) = e^x$; b) $f(x) = \sin x$; c) $f(x) = \cos x$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$; e) $f(x) = \ln(1-x)$; f) $(1+x)^\alpha$.

U f) je α racionalan broj različit od nule.

Rešenja.

a) $e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$; b) $\sin x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$;

c) $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$; d) $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$;

e) $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$; f) $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)$.

Ako je α racionalan broj različit od nule, tada je po definiciji

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!}, \quad k \in \mathrm{N}. \tag{6.26}$$

6.52. *Primeniti Maklorenovu formulu za sledeće funkcije:*

a) $f(x) = e^{5x+1}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$;

c) $f(x) = \sin(2x + \pi/3)$; d) $f(x) = \ln(x+e)$.

Rešenja. U ovom zadatku koristimo sledeće tvrdjenje. Ako je $b \neq 0$ i

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n), \quad \text{tada je} \quad f(bx) = \sum_{k=0}^{n} a_k b^k x^k + o(x^n), \quad x \to 0.$$

a) Iz $e^{5x+1} = e \cdot e^{5x}$ dobijamo

$$e^{5x+1} = e\sum_{k=0}^{n} \frac{5^k x^k}{k!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

b) Iz zadatka (6.51) imamo $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1 + (-1)x)^{-1/2}$, pa je (videti (6.26)):

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^k + o(x^n), \quad x \to 0, \quad \text{gde je za } k \in \mathrm{N}$$

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!} = (-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}.$$

Tako dobijamo $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^k + o(x^n)$, $x \to 0$.

c) Iz $f^{(k)}(x) = 2^k \sin(2x + \pi/3 + k\pi/2)$ i $f^{(k)}(0) = 2^k \sin\left(\dfrac{\pi}{6}(2+3k)\right)$, $k \in \mathrm{N}$, i iz zadatka 6.51 b) imamo

$$\sin(2x + \pi/3) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{2^{2k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin\left(\frac{\pi}{6}(2+3k)\right) + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0.$$

d) Iz $\ln(x+e) = 1 + \ln(1 + xe)$ i zadatka 6.51 e) dobijamo

$$\ln(x+e) = 1 + \sum^{n} \frac{(-1)^k x^k}{e^k k} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

6.53. *Primeniti Maklorenovu formulu na sledeće funkcije:*

a) $f(x) = (x^2+5)e^{3x}$; b) $f(x) = \dfrac{(x^2+3e^x)}{e^{2x}}$;

c) $f(x) = (x+2)\sqrt{1+x}$; d) $f(x) = \cos x + |x|^5$;

e) $f(x) = \ln\dfrac{2-3x}{3+2x}$; f) $f(x) = \ln(6+11x+6x^2+x^3)$;

g) $f(x) = \dfrac{1-2x^2}{2+x-x^2}$; h) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x^3+x^2+x+1}$.

Rešenja.

a) Na osnovu jednakosti $(x^2+5)e^{3x} = x^2e^{3x} + 5e^{3x}$ dobijamo

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\sum_{k=0}^{n-2}\frac{3^kx^k}{k!} + o(x^n) + 5\sum_{k=0}^{n}\frac{3^kx^k}{k!} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=2}^{n}\frac{3^{k-2}x^k}{(k-2)!} + 5\sum_{k=2}^{n}\frac{3^kx^k}{k!} + 5 + 15x + o(x^n) \\ &= 5 + 15x + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3^{k-2}}{(k-2)!} + 5\frac{3^k}{k!}\right)x^k + o(x^n) \\ &= 5 + 15x + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3^{k-2}}{k!}(k(k-1)+5\cdot 9)\right)x^k + o(x^n), \quad x\to 0. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2e^{-2x} + 3e^{-x} \\ &= x^2\left(\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-2x)^k}{k!} + o(x^{n-2})\right) + 3\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^k}{k!} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=2}^{n}\frac{(-2)^{k-2}x^k}{(k-2)!} + 3 - 3x + 3\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^kx^k}{k!} + o(x^n) \\ &= 3 - 3x + \sum_{k=2}^{n}(3 + k(k-1)2^{k-2})\frac{(-1)^kx^k}{k!} + o(x^n), \quad x\to 0. \end{aligned}$$

c) Ako u zadatku 6.51 f) stavimo $\alpha = 1/2$, dobijamo

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \sum_{k=2}^{n}\frac{(2k-3)!!}{2^kk!}x^k + o(x^n), \quad x\to 0.$$

Prema tome je za $x\to 0$

$$\begin{aligned} (x+2)\sqrt{1-x} &= x - \frac{x^2}{2} - \sum_{k=3}^{n}\frac{(2k-5)!!}{2^{k-1}(k-1)!}x^k + o(x^n) \\ &\quad + 2 - x - 2\sum_{k=2}^{n}\frac{(2k-3)!!}{2^kk!}x^k + o(x^n) \\ &= 2 - \frac{3x^2}{4} - \sum_{k=3}^{n}\frac{6(2k-5)!!(k-1)}{2^kk!}x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

d) Posmatrjmo funkciju $h(x) = |x|^5$. Ona ima četiri izvoda na $\mathbf{R}$ i važi

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = h'''(0) = h^{(4)}(0) = 0.$$

Dalje, funkcija h ima i peti izvod na skupu $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, tako da možemo pisati

$$h(x) = P_4(x) + o(x^4) = o(x^4), \quad x\to 0,$$

jer je $P_4(x)\equiv 0$. Prema tome, imamo

$$\cos x + |x|^5 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4), \quad x\to 0.$$

e) Kako je $\ln\dfrac{2-3x}{3+2x} = \ln 2 - \ln 3 + \ln\left(1-\dfrac{3x}{2}\right) - \ln\left(1+\dfrac{2x}{3}\right)$, to iz zadatka 6.51 e) sledi da je

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln 2 - \ln 3 - \sum_{k=1}^{n}\frac{3^kx^k}{2^kk} + o(x^n) + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-2)^kx^k}{3^kk} + o(x^n) \\ &= \ln 2 - \ln 3 + \sum_{k=1}^{n}\frac{((-4)^k - 9^k)x^k}{6^kk} + o(x^n), \quad x\to 0. \end{aligned}$$

f) Iz $\ln(6+11x+6x^2+x^3) = \ln(3+x) + \ln(2+x) + \ln(1+x)$, sledi

$$f(x) = \ln 6 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{3^kk} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{2^kk} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n)$$

$$= \ln 6 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{6^kk}(2^k + 3^k + 6^k) + o(x^n), \quad x\to 0.$$

g) Iz $\dfrac{1-2x^2}{2+x-x^2} = 2 + \dfrac{-7}{3(2-x)} + \dfrac{-1}{3(1+x)}$, sledi za $x \to 0$

$$f(x) = 2 - \frac{7}{6}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{2^k} - \frac{1}{3}\cdot\sum_{k=0}^{n}(-x)^k + o(x^n) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\left((-2)^{k+1}-7\right)x^k}{3\cdot 2^{k+1}} + o(x^n).$$

h)
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+2}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{1+x^2} + \frac{3}{1+x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^{2k+1} + 3\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k x^k\right) + o(x^{2n}) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(3+(-1)^k)x^{2k}}{2} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{((-1)^{k+1}-3)x^{2k+1}}{2} + o(x^{2n}), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

6.54. *Primeniti Maklorenovu formulu na sledeće funkcije:*

a) $f(x) = x^3\cos^2 x$; b) $f(x) = \sin^2 x\cos^2 x$; c) $f(x) = \sin^4 + \cos^4 x$;

d) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; e) $f(x) = \arcsin x$; f) $f(x) = \operatorname{sh} x$;

g) $f(x) = \operatorname{ch} x$; h) $f(x) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} 2x$.

Rešenja.

a) Kako je $x^3\cos^2 x = x^3\dfrac{1+\cos 2x}{2}$, to iz zadatka 6.51 c) sledi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k 2^{2k} x^{2k+3}}{(2k)!} + o(x^{2n+2}) \\ &= x^3 + \sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k-1}2^{2k-3}x^{2k+1}}{(2k-2)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

b) Kako je $\sin^2 x\cos^2 x = \dfrac{1}{8}(1-\cos 4x)$, to imamo

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}2^{4k-3}x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

c) Iz jednakosti $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{1}{4}(3+\cos 4x)$, dobijamo

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k 2^{4k-2}x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

d) Na osnovu jednakosti $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})$ možemo pisati

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0.$$

e) Pošto je $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^{2k} + o(x^{2n+1})$, to sledi

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)}x^{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

f) Iz $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, dobijamo

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0.$$

g) Iz jednakosti $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ dobijamo

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \to 0.$$

h) Kako je $\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} 2x = \dfrac{e^{3x} - e^x + e^{-x} - e^{-3x}}{4} = \dfrac{1}{2}\operatorname{sh} 3x - \dfrac{1}{2}\operatorname{sh} x$, to je

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 2x &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{3^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) + o(x^{2n+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{2(2k+1)!}(3^{2k+1}-1) + o(x^{2n+2}), \quad x \to 0. \end{aligned}$$

6.55. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} - 2e^x + 2x^2}{\arcsin x - \sin x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}(\sin x) - \sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x^2}{5}}}{\operatorname{arctgh} x - x}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x + \frac{3x^2}{2} - \frac{2}{1-x} + \exp(\operatorname{arctg} x) + 1}{\ln\frac{1-x}{1+x} + 2x}$

Rešenja.

a) U ovom slučaju posmatraćemo Maklorenovu formulu za odgovarajuće funkcije. Na osnovu jednakosti

$\sqrt{1+t} = 1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}+\frac{t^3}{16}+o(x^3),\ \ x \to 0, \qquad t = \operatorname{arctg} x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$

kada $x \to 0$, dobijamo

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} &= 1+\frac{2\operatorname{tg} x}{2}-\frac{(2\operatorname{tg} x)^2}{8}+\frac{(2\operatorname{tg} x)^3}{16}+o(\operatorname{tg}^3 x),\\ &= 1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+o(x^3),\ \ x \to 0.\end{aligned}$$

Tako iz asimptotskih relacija (kada $x \to 0$) : $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, $\arcsin x = x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$, dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+2\operatorname{tg} x}-2e^x+2x^2}{\arcsin x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{4}{3}x^2+o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)} = 4.$$

b) Na osnovu sledećih jednakosti:

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(\sin x) &= 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^4+o(x^4),\\ &= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4),\ \ x \to 0;\\ \left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{1/5} &= 1-\frac{x^2}{10}-\frac{x^4}{50}+o(x^4),\ \ x \to 0;\\ \operatorname{arctgh} x &= x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)\ \ x \to 0,\end{aligned}$$

sledi $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}(\sin x)-\sqrt[5]{1-\frac{x^2}{2}-\frac{3x^2}{5}}}{\operatorname{tgh} x-x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-21x^4}{200}+o(x^4)}{-\frac{x^3}{3}+o(x^4)} = 0.$

c) Na osnovu sledećih relacija:

$\operatorname{arctg} x = x-\frac{x^3}{3}+o(x^3),\ \ \ln\frac{1-x}{1+x} = -2x-\frac{2}{3}x^3+o(x^3),$

$\exp(\operatorname{arctg} x) = 1+(x-\frac{x^3}{3})+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3) = 1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3),$

$\frac{2}{1-x} = 2+2x+2x^2+2x^3+o(x^3)$, kada $x \to 0$, dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{3x^2}{2}-\frac{2}{1-x}+\exp(\operatorname{arctg} x)+1}{\ln\frac{1-x}{1+x}+2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{13}{6}x^3+o(x^3)}{-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)} = 13/4.$$

6.56. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos(xe^x)-\ln(1-x)-x)^{1/x^3}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\cos(\sin x)+\frac{x^2}{2}\right)^{1/(x^2(\sqrt{1+2x}-1))}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x\cdot\operatorname{arctg} x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x\cdot\arcsin x}\right)$.

Rešenja.

a) Koristeći sledeće Maklorenove formule ($x \to 0$) :

$xe^x = x+x^2+o(x^2)$, što povlači $\cos(xe^x) = 1-x^2/2-x^3+o(x^3)$,

i $\cos(xe^x)-\ln(1-x) = 1+x-2x^3/3+o(x^3)$, dobijamo

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos(xe^x)-\ln(1-x)-x)^{1/x^3} = \lim_{x\to 0}(1-2x^3/3+o(x^3))^{1/x^3} = e^{-2/3}.$

b) Iz sledećih asimptotskih relacija ($x \to 0$) :

$\cos(\sin x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^3),\quad \sqrt{1+2x} = 1+x+o(x),$

$\frac{1}{x^2(\sqrt{1+2x}-1)} = \frac{1}{x^3+o(x^3)}$, dobijamo

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos(\sin x)+\frac{x^2}{2}\right)^{1/(x^2(\sqrt{1+2x}-1))}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+5x^4/4!+o(x^4)\right)^{1/(x^3+o(x^3))}=1$$

c) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x\cdot \operatorname{arctg} x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x\cdot \arcsin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=1.$$

6.4 Lopitalovo pravilo

Neka je c realan broj ili simbol ∞, tj. jedan od simbola $+\infty$ ili $-\infty$.

Izraz $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ je **neodredjen oblika** "0/0" u $x=c$, ako je

$$\lim_{x\to c} f(x)=0,\quad \lim_{x\to c} g(x)=0.$$

Izraz $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **neodredjen oblika** "∞/∞" u $x=c$ ako je

$$\lim_{x\to c} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to c} g(x)=\infty.$$

Teorema 6.5. Lopitalovo pravilo.
Neka su funkcije f i g diferencijabilne u svakoj tački intervala (a,b), osim možda u tački $c\in(a,b)$. Ako je $g'(x)\neq 0$ za $x\neq c$, i ako je $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ jedan od neodredjenih izraza oblika "$\dfrac{0}{0}$" ili "$\dfrac{\infty}{\infty}$" u $x=c$, tada važi

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{6.27}$$

pod uslovom da $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ima graničnu vrednost kada x teži ka c.

Teorema 6.5 važi i ako je $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, jer je tada $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

6.4.1 Zadaci

6.57. *Primenom Lopitalovog pravila odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+3x-1}{2x}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{x\sin 2x}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$, $a,b\neq 0$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{a^x-a^a}$, $a>0,\ a\neq 1$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$, $a>0$;

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$.

Rešenja.

a) Funkcije $f(x)=\cos x+3x-1$ i $g(x)=2x$ su diferencijabilne na intervalu koji sadrži nulu i izrazi su oblika "$\dfrac{0}{0}$" kada $x\to 0$, pa je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+3x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+3}{2}=3/2.$$

U zadacima b)–f), uslovi Lopitalovog pravila su ispunjeni, pa važe sledeće jednakosti:

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2\sin x}{\sin 2x+2x\cos 2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+2\cos x}{4\cos 2x-4x\sin 2x}=4/4=1.$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-a\sin ax}{\cos ax}}{\dfrac{-b\sin bx}{\cos bx}}=\lim_{x\to 0}\frac{a\sin ax\cdot\cos bx}{b\sin bx\cdot\cos ax}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\dfrac{\sin ax}{ax}\cdot\cos bx}{b^2\dfrac{\sin bx}{bx}\cdot\cos ax}=\frac{a^2}{b^2}.$$

d) $$\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^x}{a^x-a^a}=\lim_{x\to a}\frac{ax^{a-1}-a^x\ln a}{a^x\ln a}=\frac{1-\ln a}{\ln a}.$$

e) $$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(a+x)}\left(\ln(a+x)+\dfrac{x}{a+x}\right)-a^x\ln a}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(a+x)}\left(\left(\ln(a+x)+\dfrac{x}{a+x}\right)^2+\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{a}{(a+x)^2}\right)-a^x\ln^2 a}{2}=\frac{1}{a}.$$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x(\ln x + 1) - 1}{\dfrac{1}{x} - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{x+1}(\ln x + 1) - x}{1 - x}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x + 1)\left(1 + \dfrac{1}{x} + \ln x\right) + x^x - 1}{-1} = -2.$$

6.58. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln x}{x^b}$, $b > 0$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^b}{e^{ax}}$, $b > 0$, $a \in \mathbf{R}$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$.

Rešenja. Izrazi su oblika "$\dfrac{\infty}{\infty}$", i uslovi Lopitalovog pravila su ispunjeni, pa imamo sledeće jednakosti.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x + 2}{2x} = \dfrac{6}{2} = 3.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\ln x}{x^b} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{2}{x}}{bx^{b-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{bx^b} = 0.$

c) Ako je $a \le 0$, tada je $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^b}{e^{ax}} = +\infty$.

Ako je $a > 0$, tada možemo odrediti $k \in \mathbf{N}$ takvo da je $k \ge b$. Primenom Lopitalovog pravila $k-$puta dobijamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^{ax}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{k!}{a^k e^{ax}} = 0.$$

Kako je $0 < \dfrac{x^b}{e^{ax}} \le \dfrac{x^k}{e^{ax}}$, $x > 0$, to sledi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0.$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x\ln x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0.$

6.59. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{1/x} - 1)$; b) $\lim\limits_{x\to 0+} \sin x \ln \operatorname{ctg} x$;

c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln^\beta\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\alpha, \beta > 0$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)$.

Rešenja.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{1/x} - 1}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{1/x}(\frac{-1}{x^2})}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to 0+} \sin x \ln \operatorname{ctg} x = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln \operatorname{ctg} x}{\dfrac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\dfrac{-1}{\operatorname{ctg} x \sin^2 x}}{\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} =$ 0.

c) Odredimo prvo za $k \in \mathbf{N}$ graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\alpha/k} \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Primenom Lopitalovog pravila dobijamo

$$\lim_{x\to 0+} x^{\alpha/k} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{-\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{\alpha}{k} x^{-\alpha/k-1}} = \frac{k}{\alpha} \lim_{x\to 0+} x^{\alpha/k} = 0. \qquad (6.28)$$

Takodje je $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln^k\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Ako izaberemo $k \in \mathbf{N}$ takvo da je $k > \beta$, tada je $0 \le x^\alpha \left|\ln^\beta x\right| \le x^\alpha \left|\ln^k x\right|$, za $x > 0$. Na osnovu (6.28) sada sledi $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \ln^\beta\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\dfrac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{x^2+1}}} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2\dfrac{1}{x^2+1}}{-\dfrac{1}{x^2}} =$$

2.

6.60. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Rešenja. U ova dva primera imamo neodredjene oblike "$\infty-\infty$", tako da je potrebno izvršiti odredjene transformacije da bi se dobili oblici na koje se može primeniti Lopitalovo pravilo.

a)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x+\cos^2 x-1}{\sin^2 x+4x\sin x\cos x+x^2(\cos^2 x-\sin^2 x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{\sin^2 x+4x\sin x\cos x+x^2(\cos^2 x-\sin^2 x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-2}{1+4\dfrac{x}{\sin x}\cos x+\dfrac{x^2}{\sin^2 x}(\cos^2 x-\sin^2 x)} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{xe^x-x} \doteq \lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{xe^x+e^x-1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{xe^x+2e^x} = -1/2.\end{aligned}$$

6.61. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}x^{1/(1-x)}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x}$;

g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^{x}$; h) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tgh} x)^{1/x}$.

Rešenja. U ovim zadacima se javljaju neodredjeni oblici "1^∞".

a) Funkcija $y=(1+2x)^{1/x}$ se može pisati u obliku $\ln y = \dfrac{1}{x}\ln(1+2x)$,

odakle je
$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{1+2x}}{1} = 2.$$
Prema tome, imamo
$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{1/x} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\ln y\right) = e^2.$$

b) Posmatrajmo funkciju $y=\exp(\ln u)$, gde je $u=x^{1/(1-x)}$. Tada važi
$$\lim_{x\to 1}\exp(\ln u) = \exp\left(\lim_{x\to 1}\ln u\right) = \exp\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x\right).$$
Tako dobijamo
$$\left(\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{-1} = -1\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0}x^{1/(1-x)} = e^{-1}.$$

c) $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2x}\right) = e^{-1/2}.$$

d) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x} &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)}{x}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\arccos x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right) = e^{-2/\pi}.\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{\sin x}{x}}{x^2}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{2x\sin x+x^2\cos x}\right)\\ &= e^{-1/6}.\end{aligned}$$

f) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)^{1/x} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+1}-1}{2x}\right) = e^{-1/2}.$$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x = \exp\left(\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)\right)$

$$= \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}}{-\dfrac{1}{x^2}}\right) = e^{-2/\pi}.$$

h) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tgh} x)^{1/x} = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+\operatorname{tgh} x}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{1}\right) = e.$

6.62. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to 0+}(e^x-1)^x$; b) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$;

c) $\lim\limits_{x\to 0+} x^{1/\ln\operatorname{sh} x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0+}(\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Rešenja. U ovim primerima se pojavljuje neodredjeni oblik "0^0".

a) Za funkciju $y=(e^x-1)^x$ imamo $\ln y = x\ln(e^x-1)$. Prema tome je

$$\lim_{x\to 0+}\ln y = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(e^x-1)}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\dfrac{e^x}{e^x-1}}{\dfrac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{-x^2e^x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0+}\frac{-(2xe^x+x^2e^x)}{e^x} = 0,$$

što povlači $\lim\limits_{x\to 0+}(e^x-1)^x = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\ln y\right) = e^0 = 1.$

b) Na osnovu jednakosti $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+}(-x) = 0,$

dobijamo $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\ln y\right) = e^0 = 1.$

c) Pošto je $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{\ln\operatorname{sh} x} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}\operatorname{ch} x} = 1$, to je $\lim\limits_{x\to 0+} x^{1/\ln\operatorname{sh} x} = e.$

d) Iz jednakosti $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(\arcsin x)}{\operatorname{ctg} x} = \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\dfrac{1}{\arcsin x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\dfrac{1}{\sin^2 x}} = 0,$

dobijamo $\lim\limits_{x\to 0+}(\arcsin x)^{\operatorname{tg} x} = 1.$

6.63. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2+3^x)^{1/x}$.

Rešenja. U ovim zadacima se pojavljuju neodredjeni izrazi oblika "∞^0".

a) Iz $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, sledi $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1/x} = e^0 = 1.$

b) Na osnovu jednakosti

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x^2+3^x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{6x+3^x\ln 3}{3x^2+3^x} = \ln 3,$$

dobijamo $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2+3^x)^{1/x} = 3.$

6.64. *Odrediti sledeće granične vrednosti:*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sin x}{2x+\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin\dfrac{1}{x}}{\sin^2 x}$.

Rešenja.

a) Za $x>2$, imamo

$$\frac{2x-1}{2x+1}\le\frac{2x-\sin x}{2x+\sin x}\le\frac{2x+1}{2x-1} \quad \text{i} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{2x-1} = 1,$$

pa je $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-\sin x}{2x+\sin x} = 1.$

U ovom slučaju ne može se primeniti Lopitalovo pravilo. Naime, granična vrednost

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-\sin x)'}{(2x+\sin x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2-\cos x}{2+\cos x},$$

ne postoji, jer ne postoji $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$.

b) Količnik izvoda $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ne postoji, pa ne možemo primeniti Lopitalovo pravilo. Medjutim, data granična vrednost postoji i jednaka je

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\frac{1}{x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}=0.$$

6.5 Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije

Teorema 6.6. *Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b).*

- *Ako je $f'(x) > 0$ za sve $x \in (a,b)$, tada je f monotono rastuća funkcija na intervalu $[a,b]$.*
- *Ako je $f'(x) < 0$ za sve $x \in (a,b)$, tada je f monotono opadajuća funkcija na intervalu $[a,b]$.*

Za dokaz ove teoreme videti zadatak 6.44.

Teorema 6.7. *Neka je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b).*

- *Ako je funkcija f rastuća na $[a,b]$, tada je $f'(x) \geq 0$ za sve $x \in (a,b)$.*
- *Ako je funkcija f opadajuća na $[a,b]$, tada je $f'(x) \leq 0$ za sve $x \in (a,b)$.*

Definicija 6.3. *Broj $c \in (a,b)$ je* **kritičan broj** *funkcije $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ ako je ili $f'(c) = 0$ ili $f'(c)$ ne postoji.*

Potreban uslov za postojanje lokalne ekstremne vrednosti funkcije daje sledeća teorema.

Teorema 6.8. *Ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ neprekidna na $[a,b]$ i ima lokalni ekstrem (maksimum ili minimum) u tački $c \in (a,b)$, tada je c kritičan broj funkcije f.*

Dovoljne uslove za postojanje lokalne ekstremne vrednosti funkcije daju sledeće dve teoreme.

Teorema 6.9. *Neka je c kritičan broj funkcije f i neka je (a,b) otvoren interval koji sadrži tačku c. Neka je dalje funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$ i diferencijabilna na otvorenom intervalu (a,b), osim možda u c.*

- *Ako je $f'(x) > 0$, za $x \in (a,c)$ i $f'(x) < 0$ za $x \in (c,b)$, tada je $f(c)$ lokalni maksimum funkcije f.*
- *Ako je $f'(x) < 0$, za $x \in (a,c)$ i $f'(x) > 0$ za $x \in (c,b)$, tada je $f(c)$ lokalni minimum funkcije f.*
- *Ako je $f'(x) < 0$, ili $f'(x) > 0$, za sve $x \in (a,b)$, izuzev možda u tački c, tada $f(c)$ nije lokalni ekstrem funkcije f.*

Teorema 6.10. *Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna funkcija na intervalu (a,b), koji sadrži tačku c i neka je $f'(c) = 0$.*

- *Ako je $f''(c) < 0$, tada funkcija f ima lokalni maksimum u c.*
- *Ako je $f''(c) > 0$, tada funkcija f ima lokalni minimum u c.*

Teorema 6.11. *Neka funkcija f ima u tački c sve izvode do reda $n > 2$, i neka važi*

$$f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0, \quad ali \quad f^{(n)}(c) \neq 0.$$

- *Ako je n* paran broj, *tada c* **jeste** *ekstremna vrednost funkcije f.*
- *Ako je n* neparan broj, *tada c* **nije** *ekstremna vrednost funkcije f.*

6.5.1 Zadaci

6.65. *Odrediti kritične brojeve funkcije $f(x) = (x+5)^2\sqrt[3]{x-4}$, $x \in \mathbf{R}$.*

Rešenje. Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = \dfrac{(x+5)(7x-19)}{3(x-4)^{2/3}}$, $x \neq 4$. Odatle je $f'(x) = 0$ za $x = -5$ i $x = 19/7$. Prvi izvod ne postoji za $x = 4$, tako da data funkcija ima tri kritična broja, i to $x_1 = -5$, $x_2 = 19/7$ i $x_3 = 4$.

6.66. *Odrediti lokalne ekstreme, kao i intervale na kojima sledeće funkcije monotono rastu odnosno opadaju:*

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-6x+16}$, $x \in \mathbf{R}$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbf{R}$;

c) $f(x) = x^{2/3}(x^2-8)$, $x \in \mathbf{R}$;

d) $f(x) = x - \sin x$, $x \in \mathbf{R}$;

e) $f(x) = \sin^2 x$, $x \in \mathbf{R}$;

f) $f(x) = x + \ln x$, $x > 0$.

Rešenja.

a) Iz $f'(x) = \dfrac{16 - x^2}{(x^2 - 6x + 16)^2}$, sledi da je $f'(x) = 0$ za $x_1 = 4$ i $x_2 = -4$. Dakle, kritične tačke date funkcije $A(4, 1/2)$ i $B(-4, -1/19)$. Na osnovu teoreme 6.10, iz relacija

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 96x + 192}{(x^2 - 6x + 16)^3}, \quad f''(4) < 0, \quad f''(-4) > 0,$$

sledi da funkcija f ima lokalni maksimum u tački A i lokalni minimum u tački B.

Kako je $f'(x) > 0$ ako i samo ako je $16 - x^2 > 0$ (resp. $f'(x) < 0$ ako i samo ako je $16 - x^2 < 0$), to funkcija f monotono raste na intervalu $(-4, 4)$, a monotono opada na intervalima $(-\infty, -4)$ i $(4, +\infty)$.

b) U ovom slučaju je $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3x^{2/3}(x^{4/3} + x^{2/3} + 1)}$. Rešenja jednačine $f'(x) = 0$ su $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Tako dobijamo da funkcija f ima lokalni maksimum u tački $A(-1, 2/3)$ i lokalni minimum u tački $B(1, -2/3)$. Primetimo da je $x = 0$ kritičan broj funkcije f, ali u toj tački funkcija nema lokalni ekstrem.

Funkcija f monotono opada kada je $x^2 - 1 < 0$, tj. na intervalu $(-1, 1)$, a monotono raste na intervalima $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$.

c) Iz $f'(x) = \dfrac{8(x^2 - 2)}{3x^{1/3}}$, $x \neq 0$, sledi da su kritični brojevi funkcije f $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$ i $x_3 = 0$.

Iz drugog izvoda funkcije f sledi da ona ima lokalne minimume u x_1 i u x_2. Na osnovu znaka f' sledi da funkcija f ima lokalni maksimum u tački $x_3 = 0$, i pored toga što u toj tački prvi izvod ne postoji.

Funkcija f monotono raste na intervalima $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ i $\left(\sqrt{2}, +\infty\right)$, a monotono opada na intervalima $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ i $\left(0, \sqrt{2}\right)$.

d) Kako je $f'(x) = 1 - \cos x$, to funkcija f monotono raste na intervalima $(2k\pi, (2k + 2)\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. Kako je $f''(2k\pi) = \sin(2k\pi) = 0$ i $f'''(2k\pi) = \cos(2k\pi) = 1 \neq 0$, to f nema lokalnih ekstremnih vrednosti na $\mathbf{R}$, tj. f monotono raste na $\mathbf{R}$.

e) Iz $f'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$, $x \in \mathbf{R}$, sledi da je $f'(x) = 0$ za $x_k = k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$. Kako je $f''(x) = 2\cos(2x)$ i $f''(x_k) = 2(-1)^k$, $k \in \mathbf{Z}$, dobijamo da u tačkama x_{2j} funkcija f ima lokalne minimume, a u tačakma x_{2j+1}, funkcija f ima lokalne maksimume ($j \in \mathbf{Z}$).

Funkcija f monotono raste na intervalima $(k\pi, (2k + 1)\pi/2)$, a monotono opada na intervalima $((2k + 1)\pi/2, (k + 1)\pi)$ ($k \in \mathbf{Z}$).

f) Na osnovu jednakosti $f'(x) = \dfrac{1 + x}{x}$, $x > 0$, sledi da funkcija nema lokalnih ekstremnih vrednosti. Ona raste na celom svom domenu $(0, +\infty)$.

6.67. *Odrediti ekstremne vrednosti sledećih funkcija:*

a) $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$;   b) $f(x) = x^3 + x^4$.

Rešenja.

a) Funkcija je diferencijabilna za svako $x \in \mathbf{R}$. Kako je $f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$, to je $f'(x) = 0$ za $x = 0$. Dalje je $f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x$, i $f'''(x) = \operatorname{sh} x + \sin x$, što povlači $f''(0) = 0$ i $f'''(0) = 0$. Pošto je $f^{(4)}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$ i $f^{(4)}(0) = 2 \neq 0$, to data funkcija ima lokalni ekstrem u tački $x = 0$. Kako je $f^{(4)}(0) > 0$, to f ima u toj tački lokalni minimum.

b) Kritični brojevi date funkcije su $x_1 = 0$ i $x_2 = -3/4$, jer je $f'(x) = 3x^2 + 4x^3$. Iz $f''(x) = 6x + 12x^2$ i $f'''(x) = 6 + 24x$ sledi $f''(0) = 0$ i $f'''(0) = 6$. Dakle, data funkcija nema lokalni ekstrem u tački $x_1 = 0$. (U stvari, tačka $A(0, 0)$ je tačka prevoja.) Funkcija f ima lokalni minimum u tački x_2.

6.68. *Odrediti intervale monotonosti i ekstremne vrednosti funkcije $y = f(x)$ date parametarski sa*

$$x = \frac{t^3}{t^2 + 1}, \quad y = \frac{t^3 - 2t^2}{t^2 + 1}, \quad t \in \mathbf{R}.t \in \mathbf{R}.$$

Rešenje. Iz $x'_t = \dfrac{t^2(t^2 + 3)}{(t^2 + 1)^2}$ i $y'_t = \dfrac{t(t - 1)(t^2 + t + 4)}{(t^2 + 1)^2}$ sledi

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t - 1)(t^2 + t + 4)}{t(t^2 + 3)}, \quad t \neq 0.$$

U tački $x_1 = 0$ (za $t = 0$) funkcija $y = f(x)$ nema izvod, a njen drugi kritični broj se dobija iz $y'_x = 0$, dakle za $x_2 = 1/2$ (za $t = 1$.)

Ako je $t < 0$, tada je $x < 0$, pa iz $y'_x > 0$ sledi da funkcija monotono raste na intervalu $(-\infty, 0)$. Ako je $t \in (0, 1)$, tada $x \in (0, 1/2)$, a iz $y'_x < 0$

sledi da funkcija monotono opada na $(0,1/2)$. Dakle u tački $x_1 = 0$ funkcija ima lokalni maksimum.

Ako $t \in (1,+\infty)$, tada $x \in (1/2,+\infty)$, pa iz $y'_x > 0$ sledi da funkcija monotono raste na $(1/2,+\infty)$. Prema tome, u tački $x_1 = 1/2$ funkcija ima lokalni minimum.

6.69. *Neka su date sledeće dve funkcije:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pokazati da tada važe sledeći iskazi.

a) *Funkcije f i g imaju sve izvode u tački nula, i važi $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.*

b) *Funkcija f ima lokalni minimum u tački $x = 0$, ali funkcija g nema lokalni ekstrem u tački $x = 0$.*

Rešenja.

a) Lako je videti da je za $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}, \quad f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right)e^{-1/x^2}, \ldots, \quad f^{(n)}(x) = R_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2},$$

gde je $R_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ polinom po $\frac{1}{x}$ reda $3n$.

Primetimo da primenom Lopitalovog pravila $k-$puta, dobijamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.29}$$

U tački 0 je na osnovu (6.29) (za $k = 1$):

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0.$$

i slično je $f^{(n)}(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dakle, funkcije $f^{(n)}$ su neprekidne na $\mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Analogno se pokazuje da je $g^{(n)}(0) = 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

b) Funkcija f ima lokalni minimum (jednak $f(0) = 0$) u tački $x = 0$, jer je $f(x) > 0$ za $x \neq 0$.

Funkcija g nema lokalni ekstrem u tački $x = 0$, jer je za $x \neq 0$ funkcija g istog znaka kao x, tj. $g(x) > 0$ za $x > 0$ i $g(x) < 0$ za $x < 0$.

6.70. *Odrediti najveći član svakog od sledećih nizova datim opštim članom:*

a) $f_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n + 1997}$; b) $f_n = \dfrac{n^2}{n^3 + 1997}$; c) $f_n = \dfrac{n^{1997}}{e^n}$; d) $f_n = \sqrt[n]{n}$.

Rešenja.

a) Funkcija $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1997}$, $x > 0$, ima izvod $f'(x) = \dfrac{1997 - x}{2\sqrt{x}(x + 1997)^2}$, $x > 0$, Pošto je $f'(x) > 0$ za $0 < x < 1997$ i $f'(x) < 0$ za $x > 1997$, to f ima lokalni maksimum u tački $x = 1997$. Prema tome najveći clan datog niza se dobija za $n = 1997$, i on je jednak $f_{1997} = f(1997) = \sqrt{1997}/3994$.

b) Funkcija $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 1997}$, $x > 0$, ima kritičnu tačku u $x = \sqrt[3]{3994} \approx 15{,}866$. Dakle, kandidati za najveći član datog niza su f_{15} i f_{16}. Pošto je je $f_{15} = f(15) \approx 4{,}88 \cdot 10^{-2}$ i $f_{16} = f(16) \approx 4{,}20 \cdot 10^{-2}$, to se traženi član datog niza dobija za $n = 15$.

c) $n = 1997$.

d) Posmatramo funkciju $f(x) = x^{1/x}$, $x > 0$, čiji je izvod $f'(x) = x^{(1/x)-2}(1 - \ln x)$, $x > 0$. Njen lokalni maksimum je u tački $x = e$. Kako je $f_2 = \sqrt{2} \approx 1{,}41$, $f_3 = \sqrt[3]{3} \approx 1{,}44$, to sledi da se traženi član dobija za $n = 3$.

6.71. *Ako je funkcija ϕ monotono rastuća i diferencijabilna, a f diferencijabilna na $(0,+\infty)$, i postoji x_0 sa osobinom $|f'(x)| \le \phi'(x)$ za $x \ge x_0$, tada je*

$$|f(x) - f(x_0)| \le \phi(x) - \phi(x_0) \quad \text{za} \quad x \ge x_0.$$

Rešenje. Funkcije f i ϕ zadovoljavaju uslove Košijeve teoreme 6.45, pa za svako $x > x_0$ postoji $\xi \in (x_0, x)$ sa osobinom

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{\phi(x) - \phi(x_0)}\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}\right|.$$

Po uslovu zadatka je izraz na desnoj strani ≤ 1, pa pošto je funkcija ϕ monotono rastuća na $(0,+\infty)$, to je

$$|f(x) - f(x_0)| \le |\phi(x) - \phi(x_0)| = \phi(x) - \phi(x_0) \quad \text{za} \quad x \ge x_0.$$

6.72. *Ako važe sledeća tri uslova:*

(i) *funkcije f i g su $n-$puta diferencijabilne na $\mathbb{R}$;*

(ii) $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$ *za* $k = 0, 1, \dots, n-1$;

(iii) $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ *za* $x > x_0$,

pokazati da je tada $f(x) > g(x)$ *za* $x > x_0$.

Rešenja. Neka je funkcija ϕ data sa $\phi(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Tada je $\phi^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(x)$, pa je $\phi^{(n-1)}(x_0) = 0$ i $\phi^{(n)}(x) > 0$ za $x > x_0$.

Primenom Lagranžove teoreme na intervalu $[x_0, x]$ na funkciju $\phi^{(n-1)}(x)$ dobijamo da postoji $\xi \in (x_0, x)$ sa osobinom

$$\phi^{(n-1)}(x) - \phi^{(n-1)}(x_0) = \phi^{(n)}(\xi)(x - x_0),$$

Iz toga za $x > x_0$ sledi $\phi^{(n-1)}(x) > 0$, ili

$$f^{(n-1)}(x) > g^{(n-1)}(x) \quad \text{za} \quad x > x_0.$$

Slično dobijamo $f^{(n-2)}(x) > g^{(n-2)}(x)$ za $x > x_0$, pa nastavljajući ovaj postupak konačno imamo $f(x) > g(x)$ za $x > x_0$.

6.73. *Pokazati sledeće nejednakosti:*

a) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, $x > 0$; b) $\ln(1+x) > \dfrac{x}{x+1}$, $x > 0$;

c) $x^a - 1 > a(x-1)$, $a > 2$, $x > 1$; d) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$, $x > a > 0$.

U zadatku pod d), n *je prirodan broj veći od* 1.

Rešenja.

a) Ako označimo $f(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$, $g(x) = \ln(1+x)$ i $h(x) = x$, tada imamo $f(0) = g(0) = h(0) = 0$ i

$$f'(x) = 1 - x < g'(x) = \frac{1}{1+x} < h'(x) = 1, \quad x > 0.$$

Iz zadatka 6.72 dobijamo $f(x) < g(x) < h(x)$ za $x > 0$, tj.

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \quad x > 0.$$

b) Označimo sa $f(x) = \ln(1+x)$ i $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Tada iz $f(0) = g(0) = 0$ i relacija

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} > g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2},$$

dobijamo $f(x) > g(x)$, $x > 0$, ili

$$\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}, \quad x > 0.$$

c) Ako stavimo $f(x) = x^a - 1$ i $g(x) = a(x-1)$, tada je $f(1) = 0 = g(1)$ i $f'(x) = ax^{a-1} > a = g'(x)$, $x > 1$, što povlači traženu nejednakost.

d) Ako stavimo $f(x) = \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}$ i $g(x) = \sqrt[n]{x-a}$, tada ove funkcije zadovoljavaju uslove zadatka 6.72, pa sledi data nejednakost.

6.74. *Pokazati sledeće nejednakosti:*

a) $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $x \in \mathbf{R}$; b) $\operatorname{arctg} x \leq x$, $x \geq 0$;

c) $\dfrac{2}{\pi}x < \sin x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$; d) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Rešenja.

a) Ako označimo $f(x) = \cos x$ i $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$, tada imamo $f(0) = g(0) = 1$ i $f'(x) = -\sin x$, $g'(x) = -x$. Funkcija $h(x) = x - \sin x$ (videti zadatak 6.66 d)). Kako je funkcija h monotono rastuća i $h(0) = 0$, to važi

$$x - \sin x > 0, \quad x > 0, \quad \text{tj.} \quad x > \sin x, \quad x > 0.$$

Iz $f'(x) > g'(x)$, $x > 0$, sledi $f(x) > g(x)$, $x > 0$, tj. $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $x > 0$. Funkcije f i g su parne, što povlači da poslednja nejednakost važi i za $x < 0$.

b) Ako je $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$, $x \geq 0$, tada je $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} > 0$, pa je $f(x) \geq f(0)$ za $x \geq 0$, iz čega sledi data nejednakost.

c) Pokazaćemo da funkcija f data sa $f(x) = \sin x - \dfrac{2x}{\pi}$, $x \in [0; \pi/2]$, ima tačno dve nule na intervalu $[0, \pi/2]$. Naime, ako bi funkcija f imala nulu $x_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, tada bi iz Rolove teoreme sledilo da postoje najmanje dve tačke $x_3 \in (0, x_1)$ i $x_4 \in \left(x_1, \dfrac{\pi}{2}\right)$, takve da je $f'(x_3) = f'(x_4) = 0$. Medjutim, jednačina $f'(x) = 0$, tj. $\cos x - \dfrac{2}{\pi} = 0$, ima samo jedno rešenje na intervalu $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Iz prethodnog sledi da je funkcija f istog znaka na intervalu $(0, \pi/2.)$ Kako je (na primer) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3} > 0$, to imamo $\sin x > 2x/\pi$ za $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

d) Funkcije $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$ i $g(x) = 2x$ zadovoljava uslove zadatka 6.72, jer je $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = 2 = g'(0)$ i

$$f''(x) = -\sin x + 2\frac{\sin x}{\cos^3 x} = \frac{\sin x(2 - \cos^3 x)}{\cos^3 x} > 0 = g''(x), \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Prema tome je $f(x) > g(x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

6.6 Konveksnost i konkavnost

Definicija 6.4.

- *Funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je* **konveksna** *(ili:* **konkavna odozgo***) na intervalu (a, b) ako za svaki par $x_1, x_2 \in (a, b)$ i za svako $\alpha \in (0, 1)$ važi*
$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$
- *Funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je* **konkavna** *(ili:* **konkavna odozdo***) na intervalu (a, b) ako za svaki par $x_1, x_2 \in (a, b)$ i za svako $\alpha \in (0, 1)$ važi*
$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

Teorema 6.12. *Ako je funkcija f dva puta diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b), tada je f*

- *konveksna na (a, b) ako za svako $x \in (a, b)$ važi $f''(x) > 0$;*
- *konkavna na (a, b) ako za svako $x \in (a, b)$ važi $f''(x) < 0$.*

Za dokaz ove teoreme videti zadatak 6.77.

Teorema 6.13. *Neka je f diferencijabilna funkcija na intervalu (a, b). Tada je funkcija f konveksna (resp. konkavna) na intervalu (a, b) ako i samo ako je u svakoj tački intervala (a, b) grafik funkcije f iznad (resp. ispod) tangente.*

Definicija 6.5. *Neka je f neprekidna funkcija na intervalu (a, b) i diferencijabilna u tački $c \in (a, b)$. Ako funkcija f menja karakter svoje konkavnosti u c (tj. prelazi iz konveksnosti u konkavnost, ili obrnuto), tada se tačka $(c, f(c))$ (na grafiku funkcije f) naziva* **prevojna tačka** *funkcije f.*

Potreban uslov za postojanje prevojne tačke daje sledeća teorema.

Teorema 6.14. *Ako je $(c, f(c))$ prevojna tačka funkcije f, tada je ili $f''(c) = 0$ ili $f''(c)$ ne postoji.*

Dovoljne uslove za postojanje prevojne tačke daju sledeće dve teoreme.

Teorema 6.15. *Neka je funkcija f diferencijabilna u tački c i dva puta diferencijabilna na otvorenom intervalu (a, b) koji sadrži tačku c, izuzev možda u samoj tački c. Tada je $(c, f(c))$ prevojna tačka funkcije f, ako f'' menja znak prolaskom kroz tačku c.*

Teorema 6.16. *Ako funkcija f ima u tački c sve izvode do reda $n > 2$, i važi*
$$f''(c) = f'''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0, \quad \textit{dok je} \quad f^{(n)}(c) \neq 0,$$
tada, ako je n neparan broj, *$(c, f(c))$* jeste *prevojna tačka, a ako je n* paran broj, *tada $(c, f(c))$* nije *prevojna tačka.*

6.6.1 Zadaci

6.75. *Odrediti prevojne tačke i intervale konveksnosti i konkavnosti sledećih funkcija:*

a) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5x + 3$, $x \in \mathbb{R}$; b) $f(x) = \frac{|5x - 5|}{x\sqrt{x}}$, $x > 0$;

c) $f(x) = 3\exp(\sqrt[3]{x})$, $x \in \mathbb{R}$; d) $f(x) = x\sin(\ln x)$, $x > 0$.

Rešenja.

a) Iz $f''(x) = 12(x^2 - 1)$, sledi da je $f''(x) > 0$ za $x \in (-\infty, -1)\bigcup(1, +\infty)$, gde je funkcija f konkveksna, dok je za $x \in (-1, 1)$ ona konkavna.

Tačke $A(1, 3)$ i $B(-1, -7)$ su prevojne tačke, jer je $f''(x) = 0$, za $x_{1,2} = \pm 1$, a iz $f'''(x) = 24x$, sledi $f'''(x) \neq 0$ za $x = \pm 1$.

b) Funkcija f je definisana na intervalu $(0, +\infty)$ i može se pisati kao

$$f(x) = 5 \cdot \begin{cases} \frac{x - 1}{x\sqrt{x}}, & x \geq 1; \\ \frac{1 - x}{x\sqrt{x}}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Lako se dobija da je funkcija f diferencijabilna u svakoj tački $x > 0$, izuzev u tački $x = 1$. Njen drugi izvod ima oblik

$$f''(x) = \frac{15}{4} \cdot \begin{cases} \dfrac{x-5}{x^3\sqrt{x}}, & x > 1; \\[2ex] \dfrac{5-x}{x^3\sqrt{x}}, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

pa je $f''(x) > 0$ za $x \in (0,1) \cup (5,+\infty)$, odnosno $f''(x) < 0$ za $x \in (1,5)$. i $f''(5) = 0$.

Znači, na intervalima $(0,1)$ i $(5,+\infty)$ data funkcija je konveksna, a na intervalu $(1,5)$ ona je konkavna. Prevojna tačka grafika je $A(5, 4/\sqrt{5})$; medjutim, tačka $B(1,0)$ to nije, zato što funkcija f nema prvi izvod u tački $x = 1$.

c) Važe jednakosti $(x \neq 0)$: $f'(x) = \dfrac{\exp(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}$,

$f''(x) = \exp(\sqrt[3]{x}) \cdot \dfrac{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-2)}{3x^2}$. Dakle, $f''(x) = 0$ za $x = 8$. Iz nejednakosti $f''(x) > 0$ za $x \in (-\infty,0) \cup (8,+\infty)$ i $f''(x) < 0$ za $0 < x < 8$, sledi da je funkcija f konveksna na $(-\infty,0)$ i $(8,+\infty)$, a konkavna na $(0,8)$.

Tačka $B(8,3e^2)$ je prevojna tačka funkcije f. Što se tiče tačke $A(0,3)$, ona *nije* prevojna tačka funkcije f u smislu definicije 6.5, jer f nije diferencijabilna u nuli, Medjutim, pošto je

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-} f''(x) = +\infty \quad \text{i} \lim_{x\to 0+} f''(x) = -\infty,$$

i grafik funkcije f prilikom prolaza kroz tačku $A(0,3)$ prelazi iz konveksnosti u konkavnost, to bi se u *širem smislu* moglo govoriti o A kao o prevojnoj tački.

d) Na intervalu $(0,+\infty)$ je $f''(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{x}\cos\left(\ln x + \dfrac{\pi}{4}\right)$. Funkcija je konkveksna ako je

$$-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < \ln x < \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

ili $\exp(\frac{-3\pi}{4} + 2k\pi) < x < \exp(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, a konkavna ako je

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \ln x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

ili $\exp(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) < x < \exp(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$. Prevojne tačke funkcije f su

$$A_k = \left(\exp\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \frac{\exp\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}{\sqrt{2}}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$B_k = \left(\exp\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right), \frac{-\exp\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)}{\sqrt{2}}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

6.76. *Odrediti prevojne tačke funkcije $y = f(x)$ date parametarski sa*

$$x = 3 + \operatorname{ctg} t, \quad y = -2\sin t + \frac{1}{\sin t}, \quad 0 < t < \pi.$$

Rešenje. Iz $x'_t = -\dfrac{1}{\sin^2 t}$, $y'_t = -\dfrac{\cos t(2\sin^2 t + 1)}{\sin^2 t}$, i

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t},$$

sledi $y'_x = \cos t(2\sin^2 t + 1)$, $(y'_x)'_t = 3\cos 2t \sin t$, i konačno dobijamo $y''_{xx} = -3\sin^3 t \cos 2t$.

Kako je $y''_{xx} < 0$ za $t \in (0, \pi/4)$ i $t \in (3\pi/4, \pi)$, to je funkcija f konkavna na intervalima $(3 + \sqrt{2}/2, 4)$, a kako je $y''_{xx} > 0$ za $t \in (\pi/4, 3\pi/4)$, to je f konveksna na intervalu $(3 - \sqrt{2}/2, 3 + \sqrt{2}/2)$.

Za $x_1 = 3 - \sqrt{2}/2$ $(t = 3\pi/4)$ i $x_2 = 3 + \sqrt{2}/2$ $(t = \pi/4)$ važi $y''_{xx} = 0$, i pošto u tim tačkama funkcija f menja karakter svoje konkavnosti, to su tačke $A(4,0)$ i $B(2,0)$ njene prevojne tačke.

6.77. *Pokazati da ako je $f''(x) > 0$ za sve $x \in (a,b)$, tada je f konveksna funkcija na (a,b). Drugim rečima, pokazati da za svaki par tačaka $x_1, x_2 \in (a,b)$ i proizvoljne brojeve α_1 i α_2, takve da je*

$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \tag{6.30}$$

važi nejednakost:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2). \tag{6.31}$$

Rešenje. Neka je $f''(x) > 0$ za sve $x \in (a,b)$ i neka brojevi α_1 i α_2 zadovoljavaju uslove date relacijom (6.30). Ako x_1 i x_2 pripadaju intervalu (a,b) i važi $x_1 < x_2$, tada je $x_1 < \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 < x_2$. Na osnovu Lagranžove teoreme 6.3 postoje brojevi $\xi_1 \in (x_1, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$ i $\xi_2 \in (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, x_2)$ takvi da je

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - f(x_1) = f'(\xi_1)\alpha_2(x_2 - x_1) \quad \text{i}$$

$$f(x_2) - f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = f'(\xi_2)\alpha_1(x_2 - x_1),$$

Množenjem poslednje dve jednakosti sa α_1 i α_2 respektivno, dobijamo

$$\alpha_1 f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - \alpha_1 f(x_1) = f'(\xi_1)\alpha_1\alpha_2(x_2 - x_1),$$
$$\alpha_2 f(x_2) - \alpha_2 f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = f'(\xi_2)\alpha_1\alpha_2(x_2 - x_1),$$

odakle je

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \alpha_1\alpha_2(x_2 - x_1)(f'(\xi_2) - f'(\xi_1)).$$

Funkcija f ima drugi izvod na intervalu (a, b), tako da ponovnom primenom Lagranžove teoreme dobijamo

$$f'(\xi_2) - f'(\xi_1) = (\xi_2 - \xi_1) f''(\xi_3), \quad \text{za neko} \quad \xi_3 \in (\xi_1, \xi_2).$$

Prema tome je

$$\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + \alpha_1\alpha_2(x_2 - x_1)(\xi_2 - \xi_1) f''(\xi_3)).$$

Na osnovu pretpostavke $f''(x) > 0$ i zadnje relacije sledi nejednakost (6.31).

6.78. *Pokazati sledeće nejednakosti:*

a) $\dfrac{a^n + b^n}{2} > \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^n, \quad a > 0,\ b > 0,\ a \neq b,\ n \in \mathrm{N},\ n \geq 2;$

b) $\dfrac{e^x + e^y}{2} > e^{(x+y)/2}, \quad x \neq y.$

Rešenja. Ako je $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, i ako je f konveksna funkcija na intervalu (a, b), na osnovu definicije 6.4 važi

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \quad x_1, x_2 \in (a, b). \tag{6.32}$$

Pošto su funkcije

a) $f(x) = x^n, \quad x > 0, \quad n \in \mathrm{N},\ n \geq 2;$ b) $f(x) = e^x, \quad x \in \mathrm{R},$

konveksne na svojim domenima ($f''(x) > 0$), to primenom relacije (6.32) redom na gornje dve funkcije dobijamo tražene nejednakosti.

6.79. *Neka je f konveksna funkcija na intervalu (a, b), neka tačke x_1, $x_2, \ldots, x_n$ pripadaju (a, b), i neka su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ nenegativni brojevi sa osobinom $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. Tada važi* **Jensenova nejednakost** *:*

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n). \tag{6.33}$$

Dokazati.

Rešenje. Nejednakost (6.33) ćemo dokazati koristeći matematičku indukciju. Za $n = 1$ tvrdjenje je trivijalno, a za $n = 2$ relacija (6.33) važi po definiciji 6.4 (relacija (6.31)).

Neka je, dalje, data nejednakost tačna za sve prirodne brojeve manje od n; pod tom (induktivnom) pretpostavkom treba da pokažemo nejednakost (6.33) za n. Ako je neki od brojeva α_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ jednak nuli, tada (6.33) važi na osnovu induktivne pretpostavke. Neka je $\alpha_j > 0$, za sve $j = 1, 2, \ldots, n$. Ako stavimo $\beta = \alpha_2 + \cdots + \alpha_n > 0$, tada je $\dfrac{\alpha_2}{\beta} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{\beta} = 1$. To povlači

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = f\left(\alpha_1 x_1 + \beta\left(\frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta} x_n\right)\right)$$
$$\leq \alpha_1 f(x_1) + \beta\left(\frac{\alpha_2}{\beta} f(x_2) + \cdots + \frac{\alpha_n}{\beta} f(x_n)\right) \leq \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n).$$

6.80. *Dokazati sledeće nejednakosti:*

a) $\alpha_1 \ln x_1 + \cdots + \alpha_n \ln x_n \leq \ln(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n),$

$$x_i \geq 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1;$$

b) $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \quad x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n.$

Rešenja.

a) Funkcija $f(x) = \ln x$ je konkavna na $(0, +\infty)$, pa za nju važi nejednakost

$$f(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n). \tag{6.34}$$

Odatle sledi

$$\alpha_1 \ln(x_1) + \cdots + \alpha_n \ln(x_n) \leq \ln(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n). \tag{6.35}$$

b) Iz relacije (6.35) sledi

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

pa za $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \dfrac{1}{n}$ dobijamo

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

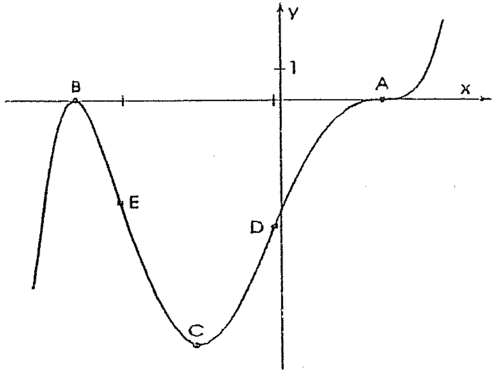
Poslednja relacija je poznata veza izmedju aritmetičke i geometrijske sredine.

6.7 Grafici funkcija

6.81. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije*

$$f(x) = (x+2)^2(x-1)^3. \qquad \textit{(Slika 6.1)}$$

Rešenje.



Sl. 6.1. $f(x) = (x+2)^2(x-1)^3$

- Domen date funkcije je $\mathbf{R}$.
- Funkcija nije ni parna ni neparna.
- Nule funkcije f se odredjuju iz $f(x) = 0$, odnosno
$$(x+2)^2(x-1)^3 = 0 \iff x \in \{1, -2\}.$$
- Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = (x+2)(x-1)^2(5x+4)$, $x \in \mathbf{R}$. Nule prvog izvoda su $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ i $x_3 = -\frac{4}{5}$.

  Kritične tačke funkcije f su $A(1,0)$, $B(-2,0)$, $C(-0.8,-8.40)$.

  Funkcija f raste kada je $f'(x) > 0$, ustvari kada
$$(x+2)(5x+4) > 0 \iff x \in (-\infty,-2)\bigcup(-\frac{4}{5},+\infty).$$
  Funkcija f opada kada $(x+2)(5x+4) < 0$, tj. za $x \in \left(-2,-\frac{4}{5}\right)$.

- Drugi izvod funkcije f je $f''(x) = 2(x-1)(10x^2+16x+1)$, odnosno $f''(x) = 0$ za $x_1 = 1$, $x_4 \approx -0.07$ i $x_5 \approx -1.53$.

  Kako je $f''(-2) = -54 < 0$, to je kritična tačka $B(-2,0)$ maksimum. Iz $f''(-0.8) > 0$, sledi da funkcija f ima minimum u tački $C(-0.8,-8.40)$.

  Primetimo da prvi izvod ne menja znak u tački $x = 1$, iako je $f'(1) = 0$, što znači da funkcija nema ekstrem u tački $x = 1$.

  Funkcija f je konveksna ako je $f''(x) = 2(x-1)(10x^2+16x+1) > 0$, tj. za $x \in (x_5,x_4)\bigcup(1,+\infty)$.

  Funkcija f je konkavna ako $f''(x) = 2(x-1)(10x^2+16x+1) < 0$, tj. za $x \in (-\infty,x_5)\bigcup(x_4,1)$.

  Iz prethodog sledi da funkcija f ima tri prevojne tačke $A(1,0)$

  $D(x_4, f(x_4))$ $E(x_5, f(x_5))$. Važi $f(x_4) \approx -4.56$ i $f(x_5) \approx -3.58$.
- Data funkcija nema asimptota.

6.82. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije*

$$f(x) = x\sqrt{x+3}. \qquad \textit{(Slika 6.2)}$$

Rešenje.

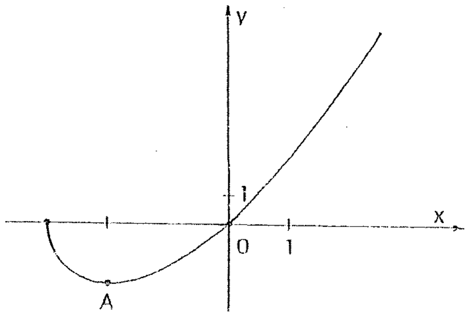
- Domen date funkcije je $[-3,+\infty)$.
- Nule funkcije f su $x_1 = 0$, $x_2 = -3$.
- Prvi izvod funkcije f je funkcija $f'(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{x+3}} + \sqrt{x+3} = \dfrac{3x+6}{2\sqrt{x+3}}$.

  Prvi izvod ima nule za $3x+6 = 0$, tj. $x = -2$, tako da je kritična tačka funkcije f $A(-2,-2)$.

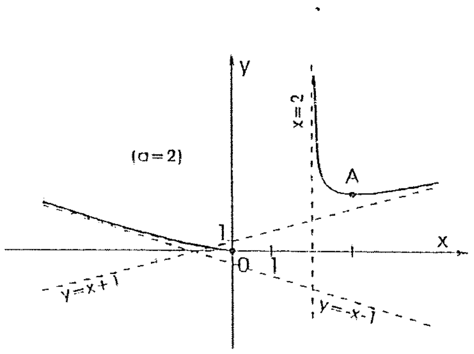
  Funkcija f raste za $3x+6 > 0$, tj. za $x > -2$, jer je $2\sqrt{x+3} > 0$ za svako x iz domena. Funkcija f opada za $-3 < x < -2$.
- Drugi izvod funkcije f je $f''(x) = \dfrac{3(x+4)}{4(x+3)^{3/2}}$.

  Iz $f''(-2) > 0$ sledi da je $A(-2,-2)$ minimum funkcije.

  Kako je $f''(x) > 0$ za svako x iz domena, funkcija je konveksna.
- Funkcija nema asimptota.



Sl. 6.2. $f(x)=x\sqrt{x+3}$



Sl. 6.3. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-a}}$

6.83. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije*

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-a}},\quad a>0.\qquad \textit{(Slika 6.3 za } a=2\textit{)}$$

Rešenje.

- Domen date funkcije je $(-\infty,0]\bigcup(a,+\infty)$, jer je
  $$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}=|x|\cdot\sqrt{\frac{x}{x-a}},\quad \text{pa je domen}\quad x(x-a)>0\vee x=0.$$
- Funkcija f ima vrednost nulu za $x=0$.
- Prvi izvod je $f'(x)=\left(x-\dfrac{3a}{2}\right)\sqrt{\dfrac{x}{(x-a)^3}}$.

  Nula prvog izvoda je $x=\dfrac{3a}{2}$. Kritična tačka funkcije f je $A\left(\dfrac{3a}{2},\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}\right)$.

  Funkcija f raste za $x\in(\dfrac{3a}{2},+\infty)$.

  Funkcija f opada za $x\in(-\infty,0)\bigcup(a,\dfrac{3a}{2})$.

- Drugi izvod funkcije je
  $$f''(x)=\sqrt{\frac{x-a}{x^3}}\cdot\frac{3a^2x}{4(x-a)^3}=\frac{3a^2}{4\sqrt{x(x-a)^5}},$$
  i nema nula. Kako je $f''(\dfrac{3a}{2})>0$, to funkcija ima minimum u tački
  $$A\left(\frac{3a}{2},\frac{3\sqrt{3}a}{2}\right).$$

  Funkcija f je konveksna na celom domenu.
- Asimptote.

  Funkcija ima vertikalnu asimptotu $x=a$, ali ne i $x=0$, jer je
  $$\lim_{x\to a+}\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}=+\infty,\qquad \lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}=0.$$

  Funkcija ima kosu asimptotu $y=x+\dfrac{a}{2}$ kada $x\to+\infty$ i $y=-x-\dfrac{a}{2}$ kada $x\to-\infty$, jer je
  $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-a}}}{x}=1,\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-a}}}{x}=-1,$$
  $$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}-x\right)=\frac{a}{2},$$
  $$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-a}}+x\right)=-\frac{a}{2}.$$

6.84. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije*

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt[3]{x^2}\qquad \textit{(Slika 6.4)}.$$

Rešenje.

- Domen date funkcije je $\mathbf{R}$.
- Funkcija je parna.
- Funkcija nema nula.

- Prvi izvod je $f'(x) = \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$.

  Kritične tačke su

  $A(-1,-1)$, $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt[3]{4}\right)$, $C(0,-1)$, $D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt[3]{4}\right)$ i $E(1,-1)$,

  jer prvi izvod ima dve nule $x_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ali nije definisana u tačkama $x_3 = 0$, $x_4 = -1$ i $x_5 = 1$.

  Funkcija f raste za $x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)\bigcup(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$.

  Funkcija f opada za $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})\bigcup(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

  Funkcija ima minimume u tačkama $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt[3]{4}\right)$, $D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt[3]{4}\right)$.

  Funkcija ima maksimum u tački $C(0,-1)$, iako u toj tački ona nema horizontalnu tangentu za $x = 0$. Ustvari imamo

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) \lim_{x\to 0+} \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} = -\infty.$$

  Primetimo da su tangente kroz tačke A i E paralelne sa $y-$osom.

- Drugi izvod je $f''(x) = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{3+x^2}{\sqrt[3]{(x^2-1)^5}}\right)$.

  Funkcija je konveksna za $x \in (-1,0) \cup (0,1)$. Funkcija konkavna za $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

  Iz

$$\lim_{x\to -1+} f''(x) = \lim_{x\to -1+} \frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} - \frac{3+x^2}{\sqrt[3]{(x^2-1)^5}}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -1-} f''(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 1-} f''(x) = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 1+} f''(x) = -\infty,$$

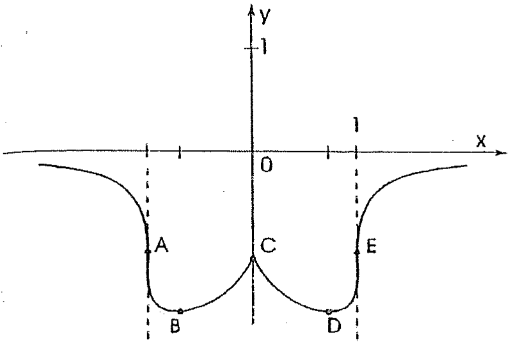
  sledi da funkcija menja konkavnost za $x = 1$ i $x = -1$.

- Asimptote. Funkcija nema vertikalnu asimptotu.

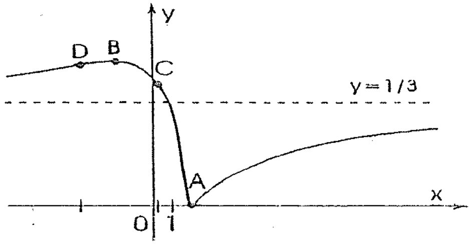
  Horizontalna asimptota je $y = 0$ kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$, jer je

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x^2-1} - \sqrt[3]{x^2}) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + \sqrt[3]{x^2(x^2-1)} + \sqrt[3]{x^4}} = 0.$$

Funkcija nema kosu asimptotu.



Sl. 6.4. $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} - \sqrt[3]{x^2}$



Sl. 6.5. $f(x) = \frac{|2-x|}{3\sqrt{x^2+4}}$

6.85. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije*

$$f(x) = \frac{|2-x|}{3\sqrt{x^2+4}}. \qquad \textit{(Slika 6.5)}$$

Rešenje. Data funkcija se može posmatrati pomoću dve funkcije

$$f_1(x) = \frac{2-x}{3\sqrt{x^2+4}}, \qquad \text{za } x \le 2,$$

$$f_2(x) = \frac{x-2}{3\sqrt{x^2+4}}, \qquad \text{za } x > 2.$$

Primetimo da je $f_1(2) = \lim_{x\to 2+} f_2(x)$ i zato je to neprekidna funkcija na $\mathbf{R}$.

- Domen date funkcije je $\mathbf{R}$.
- Funkcije $f_1(x)$ ima nulu u tački $A(2,0)$, dok funkcija $f_2(x)$ nema nula.
- Prvi izvodi su

$$f_1'(x) = -\frac{2}{3}\frac{x+2}{(x^2+4)^{3/2}}, \quad x \le 2, \quad \text{i} \quad f_2'(x) = \frac{2}{3}\frac{x+2}{(x^2+4)^{3/2}}, \quad x > 2.$$

  Prvi izvod funkcije f_1 ima nulu za $x = -2$, dok prvi izvod funkcije f_2 nema nula.

  Funkcija f_1 raste za $x \in (-\infty,-2)$ a opada za $x \in (-2,2)$.

Funkcija f_1 ima maksimum za $x_B = -2$ i ima minimum za $x_A = 2$.

Funkcija f_2 raste za $x \in (2, +\infty)$.

- Drugi izvodi su

$$f_1''(x) = \frac{4}{3}\,\frac{x^2+3x-2}{(x^2+4)^{5/2}},\ x \le 2, \quad \text{i} \quad f_2''(x) = -\frac{4}{3}\cdot\frac{x^2+3x-2}{(x^2+4)^{5/2}},\ x > 2.$$

Funkcija f_1 ima dve prevojne tačke, tj.

$$C\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}, 0.41\right) \quad \text{i} \quad D\left(-\frac{3+\sqrt{17}}{2}, 0.45\right).$$

Funkcija f_1 je konveksna ako je

$$f_1''(x) > 0, \quad \text{tj. za} \quad x \in (-\infty, x_D) \cup (x_C, 2).$$

Funkcija f_1 je konkavna za $x \in (x_D, x_C)$.

Funkcija f_2 nema prevojnih tačaka.

Funkcija f_2 je konkavna za $f_2''(x) < 0$, tj. za svako $x \in (2, +\infty)$.

- Asimptote. Funkcije nemaju vertikalnu asimptotu.

Funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 1/3$ kada $x \to -\infty$ i kada $x \to +\infty$, jer je

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-x}{3\sqrt{x^2+4}} = 1/3 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{3\sqrt{x^2+4}} = 1/3.$$

Nema kose asimptote.

6.86. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije*

$$f(x) = \sin x \sin 3x. \qquad \textit{(Slika 6.6)}$$

Rešenje. Data funkcija se može zapisati kao

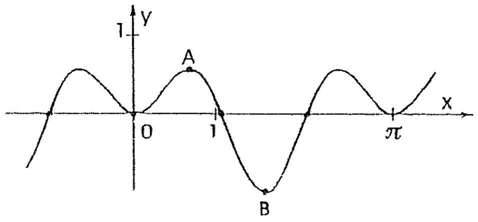
$$f(x) = \frac{\cos 2x - \cos 4x}{2} = \sin^2 x(3 - 4\sin^2 x).$$

- Domen je $(-\infty, +\infty)$.
- Funkcija je periodična sa osnovnim periodom π.
- Funkcija je parna.
- Nule funkcije f na $[0, \pi]$ se dobijaju iz $\sin x \sin 3x = 0$, što važi za $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$ i $x_3 = \dfrac{2\pi}{3}$.

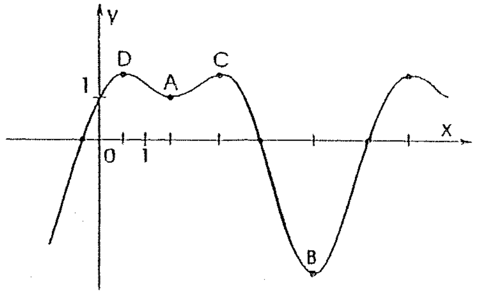
- Prvi izvod je $f'(x) = \sin 2x(4\cos 2x - 1)$.

Tačke $O(0,0)$ i $B(\pi/2, -1)$ su lokalni minimumi.

Tačka $A(\arccos(1/4)/2.9/16)$ je lokalni maksimum.



Sl. 6.6. $f(x) = \sin x \sin 3x$



Sl. 6.7. $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$

- Drugi izvod funkcije je $f'' = 16\cos^2 2x - 2\cos 2x - 8$. Prevojne tačke su

$$x_4 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{129}+1}{16}, \quad x_5 = \pm\frac{1}{2}\left(\pi - \arccos\frac{\sqrt{129}-1}{16}\right).$$

- Funkcija nema asimptota.

6.87. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije*

$$f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x. \qquad \textit{(Slika 6.7)}$$

Rešenje.

- Domen je $(-\infty, +\infty)$.
- Funkcija je periodična sa osnovnim periodom 2π.
- Ovo je parna funkcija.
- Nule funkcije se dobijaju iz jednačine

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{\sin 2x}{2}\right) = 0,$$

čija su rešenja $x_1 = \dfrac{3\pi}{4}$ i $x_2 = \dfrac{7\pi}{4}$.

- Prvi izvod je $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sin 2x(\sin x - \cos x)$.

  Tačke $A(0,1)$, $B\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ i $C\left(\dfrac{5\pi}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ su lokalni maksimumi.

  Tačke $D(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$, $E(\pi,-1)$, i $F(\dfrac{3\pi}{2},-1)$ su lokalni minimumi.

- Drugi izvod funkcije je $f''(x) = \dfrac{9}{2}(\sin x + \cos x)\left(\sin 2x - \dfrac{2}{3}\right)$.

  Prevojne tačke su
  $$x_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{7\pi}{4} \quad \text{i} \quad x_3 = \frac{\arcsin(3/2)}{2} \approx 0.36,$$
  i takodje za $x_4 \approx 1.21$, $x_5 \approx 3.51$ i $x_6 \approx 4.35$.

- Funkcija nema asimptota.

6.88. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije*

$$f(x) = xe^{-x/a}, \quad a \neq 0. \qquad (\textit{Slika 6.8 za } a = 2 \textit{ i za } a = -2)$$

Rešenje.

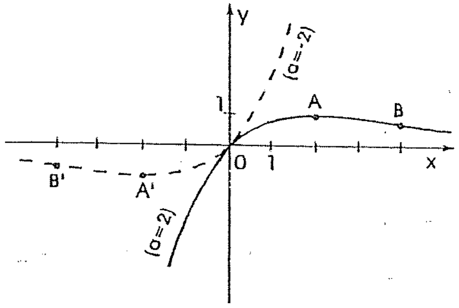
- Domen je $(-\infty,+\infty)$.
- Funkcija nije ni parna ni neparna.
- Nula funkcije je $x = 0$.
- Prvi izvod je $f'(x) = e^{-x/a}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)$.

  Ako je $a > 0$, tada je tačka $A\left(a,\dfrac{a}{e}\right)$ maksimum, i ako je $a < 0$, tada je tačka $A\left(a,\dfrac{a}{e}\right)$ minimum funkcije. Za $a > 0$, funkcija raste na intervalu $(-\infty,a)$ dok za $a < 0$, funkcija opada na intervalu $(a,+\infty)$. Za $a > 0$, funkcija opada na inervalu $(a,+\infty)$ a za $a < 0$, funkcija opada na intervalu $(-\infty,a)$.

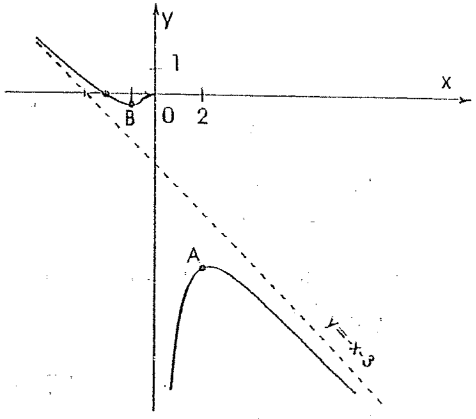
- Drugi izvod je $f''(x) = xe^{-x/a}\left(\dfrac{x}{a^2} - \dfrac{2}{a}\right)$.

  Prevojna tačka je $B(2a,2ae^{-2})$, za svako $a \neq 0$.

Funkcija je konveksna na intervalu $(2a,+\infty)$ a konkavna na $(-\infty,2a)$.



Sl. 6.8. $f(x) = xe^{-x/a}$



Sl. 6.9. $f(x) = -(x+2)e^{1/x}$

- Asimptote. Funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 0$ kada $x \to +\infty$ ako $a > 0$ (resp. kada $x \to -\infty$ ako je $a < 0$), jer je
  $$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x/a} = 0 \quad \text{za } a > 0, \quad \text{i} \quad \lim_{x\to-\infty} xe^{-x/a} = 0, \quad \text{za } a < 0.$$

6.89. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije*

$$f(x) = -(x+2)e^{1/x}. \qquad (\textit{Slika 6.9})$$

Rešenje.

- Data funkcija je definisana za $x \in (-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$.
- Funkcija nije ni parna ni neparna.
- Nula je $x = -2$.
- Prvi izvod je $f'(x) = \dfrac{x+2}{x^2}e^{1/x} - e^{1/x} = \dfrac{2+x-x^2}{x^2}e^{1/x}$.

  Kritične tačke su $A(2,-4e^{1/2})$, $B(-1,-e^{-1})$.

  Funkcija f opada za $x \in (-\infty,-1)\bigcup(2,+\infty)$ a raste za $x \in (-1,0)\bigcup(0,2)$.

- Drugi izvod je $f''(x) = -\dfrac{5x+2}{x^4}e^{1/x}$. Kako je $f''(2) = -\frac{12}{2^4}e^{1/2} < 0$ i $f''(-1) = 3e^{-1} > 0$, to važi sledeće.

  Funkcija f ima maksimum u tački $A(2, -4e^{1/2})$ i ima minimum u tački $B(-1, -e^{-1})$.

  Tačke prevoja su $C\left(-\dfrac{2}{5}, -\dfrac{8}{5}e^{-5/2}\right)$

  Funkcija je konkavna za $x \in (-2/5, 0) \cup (0, +\infty)$ i konveksna za $x \in (-\infty, -2/5)$.

- Asimptote. Vertikalna asimptota je $x = 0$, i važi
  $$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(-x-2)e^{1/x} = -\infty; \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(-x-2)e^{1/x} = 0.$$

  Kako je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x-2)e^{1/x} = -\infty$, to funkcija nema horizontalnu asimptotu.

  Kosa asimptota je $y = -x - 3$ kada $x \to \pm\infty$, jer je
  $$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x-2}{x}e^{1/x} = -1, \quad \text{i}$$
  $$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left((-x-2)e^{1/x} + x\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}(x(1-e^{1/x})) - \lim_{x\to\pm\infty} 2e^{1/x} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-e^{1/x}}{\frac{1}{x}} - 2 = \lim_{t\to 0\pm} \frac{1-e^t}{t} - 2 = -3. \end{aligned}$$

6.90. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije*
$$f(x) = e^{2x/(1-x^2)}. \qquad \textit{(Slika 6.10)}$$

Rešenje.

- Domen funkcije je $(-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, +\infty)$.
- Funkcije nije ni parna ni neparna.
- Funkcija nema nula.

- Prvi izvod je $f'(x) = \dfrac{2(x^2+1)e^{2x/(1-x^2)}}{(1-x^2)^2}$.

  Prvi izvod nema nula.

  Funkcija f raste za svako x iz domena.

- Drugi izvod je $f''(x) = 4e^{2x/(1-x^2)}\dfrac{-x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{(1-x^2)^4}$.

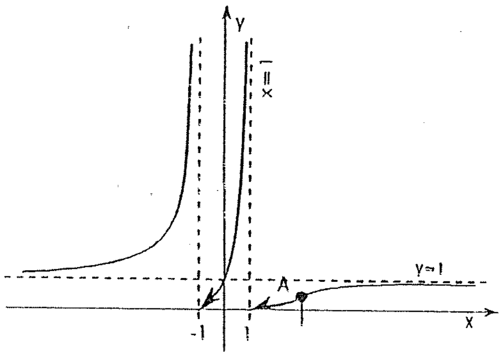
  Nula drugog izvoda je $x_A \in (1, 2)$, i to i prevojna tačka.

  Funkcija je konveksna za $x \in (-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, x_0)$ i konkavna za $x \in (x_0, +\infty)$.

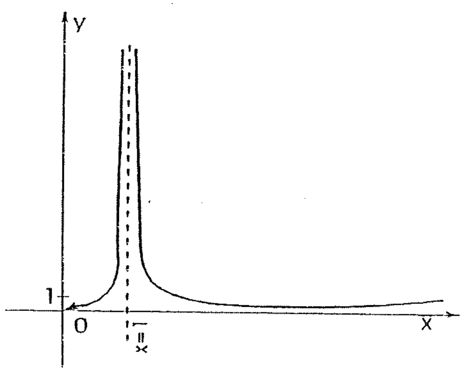
- Asimptote. Vertikalne asimptote su $x = -1$ i $x = 1$, jer je
  $$\lim_{x\to -1-} e^{2x/(1-x^2)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to -1+} e^{2x/(1-x^2)} = 0,$$
  $$\lim_{x\to 1-} e^{2x/(1-x^2)} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1+} e^{2x/(1-x^2)} = 0.$$

  Horizontalna asimptota je $y = 1$ kada $x \to \pm\infty$, jer je
  $$\lim_{x\to\pm\infty} e^{2x/(1-x^2)} = 1.$$

  Nema kosih asimptota.



Sl. 6.10. $f(x) = e^{2x/(1-x^2)}$



Sl. 6.11. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}$

6.91. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije*
$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}. \qquad \textit{(Slika 6.11)}$$

Rešenje.

- Domen funkcije je $(0,1)\bigcup(1,+\infty)$.
- Prvi izvod je $f'(x)=\dfrac{\ln x-4}{2\sqrt{x}\ln^3 x}$, $f'(x)=0$, za $x=e^4$.

  Funkcija f raste za $x\in(0,1)\bigcup(e^4,+\infty)$, a opada za $x\in(1,e^4)$. Tačka $A(e^4,e^2/8)$ je minimum funkcije.
- Drugi izvod je $f''(x)=\dfrac{24-\ln^2 x}{4\sqrt{x^3}\ln^4 x}$.

  Prevojne tačke su za $x_1=e^{\sqrt{24}}$, $x_2=e^{-\sqrt{24}}$.

  Funkcija je konveksna za $x\in(e^{-\sqrt{24}},1)\bigcup(1,e^{\sqrt{24}})$, i konkavna za $x\in(0,e^{-\sqrt{24}})\bigcup(e^{\sqrt{24}},+\infty)$.
- Asimptote. Vertikalna asimptota je $x=1$, jer je $\lim\limits_{x\to 1\pm}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}=+\infty$.
- Nema ni horizontalne ni kose asimptote.

6.92. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije*

$$f(x)=(1+x)^{1/x}=exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right). \qquad \textit{(Slika 6.12)}$$

Rešenje.

- Domen funkcije je $(-1,0)\bigcup(0,+\infty)$.
- Prvi izvod je $f'(x)=(1+x)^{1/x}\left(\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}\right)$. Iz nejednakosti $\dfrac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$, sledi da funkcija f raste na celom svom domenu.
- Drugi izvod je $f''(x)$

  $$=(1+x)^{1/x}\left(\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right)^2+\frac{1}{x^3}\left(2\ln(x+1)-\frac{2x+3x^2}{(1+x)^2}\right)\right).$$

  Funkcija $\phi(x)=2\ln(x+1)-\dfrac{2x+3x^2}{(1+x)^2}$ ima prvi izvod

  $$\phi'(x)=\frac{2x^2}{(1+x)^3}>0, \quad \text{za} \quad -1<x<+\infty.$$

Iz $\phi(0)=0$, sledi da je $\phi(x)<0$ ako $-1<x<0$, i $\phi(x)>0$ za $x>0$, odakle dobijamo

$$\frac{\phi(x)}{x^3}>0 \ \text{za} \ x\in(-1,0)\bigcup(0,+\infty).$$

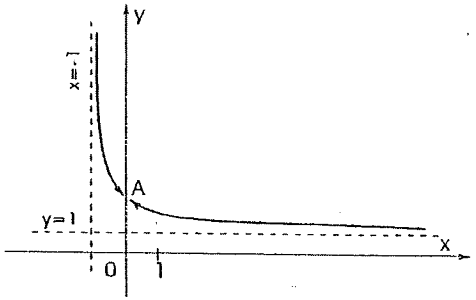
Prvi sabirak u drugom izvodu je pozitivan i drugi takodje, pa je $f''(x)>0$ za svako x iz domena. To znači da je funkcija konveksna na celom domenu.

- Asimptote. Vertikalna asimptota je $x=-1$, jer je

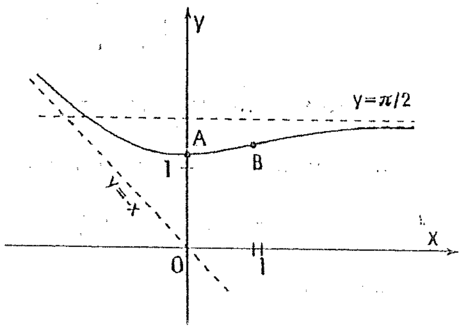
  $$\lim_{x\to-1+}(1+x)^{1/x}=+\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 0-}(1+x)^{1/x}=\lim_{x\to 0+}(1+x)^{1/x}=e.$$

  Funkcija ima horizontalnu asimptotu $y=1$ kada $x\to+\infty$, jer je $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)^{1/x}=1$.

Primedba. Tačka $A(0,e)$ ne pripada grafiku funkcije f, jer tačka 0 nije iz domena. Znači, funkcija f se može neprekidno proširiti na $x=0$ ako definišemo $f(0)=e$.



Sl. 6.12. $f(x)=(1+x)^{1/x}$



Sl. 6.13. $f(x)=\operatorname{arctg} e^x-\ln\left(\sqrt{\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}}\right)$.

6.93. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije*

$$f(x)=\operatorname{arctg} e^x-\ln\left(\sqrt{\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}}\right). \qquad \textit{(Slika 6.13)}$$

Rešenje.

- Domen funkcije je $(-\infty,+\infty)$.

- Funkcija nema nula.
- Prvi izvod je $f'(x) = \dfrac{e^x - 1}{1 + e^{2x}}$.
- Kritična tačka je $A\left(0, \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 2\right)$. Funkcija f raste za $x \in (0, +\infty)$ a opada za $x \in (-\infty, 0)$.

  Znači funkcija ima minimum u tački $A\left(0, \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2}\ln 2\right)$.
- Drugi izvod je $f''(x) = \dfrac{e^x(-e^{2x} + 2e^x + 1)}{(1 + e^{2x})^2}$.

  Nule drugog izvoda su za $x_B = \ln(1 + \sqrt{2})$, što je i prevojna tačka. Funkcija je konkavna za $x \in (-\infty, \ln(1 + \sqrt{2}))$, i konveksna za $x \in \left(\ln(1 + \sqrt{2}), +\infty\right)$.
- Asimptote. Horizontalna asimptota je $y = \pi/2$ kada $x \to +\infty$, jer je

  $$\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arct\,tg} e^x - \ln\left(\sqrt{\frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}}\right)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

  Kosa asimptota je $y = -x$ kada $x \to -\infty$.

6.94. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije*

$$f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x. \qquad \textit{(Slika 6.14)}$$

Rešenje.

- Domen je $(-\infty, -1)\bigcup(1, \infty)$.
- Funkcija nema nula.
- Prvi izvod je $f'(x) = -\dfrac{1}{(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)}$, nema nula, pa nema ni ekstrema. Funkcija opada na definicionom skupu. niti prevojnih tačaka.
- Drugi izvod je $f''(x) = 4\dfrac{x^3}{(x^2 + 1)^2(x - 1)^2(x + 1)^2}$ nema nula, pa nema ni prevojnih tačaka. Funkcija je konveksna za $x \in (1, \infty)$. a konkavna za $x \in (-\infty, -1)$.

- Funkcija ima vertikalne asimptote $x = -1$ i $x = 1$, jer je

  $$\lim_{x\to-1-}\frac{1}{4}\ln\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x = -\infty, \qquad \lim_{x\to1+}\frac{1}{4}\ln\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x = \infty.$$

  Ima horizontalne asimptote $x = \dfrac{\pi}{4}$, kada $x \to +\infty$ i $x = \dfrac{\pi}{4}$, kada $x \to -\infty$.

6.95. *Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije*

$$f(x) = \ln\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}. \qquad \textit{(Slika 6.15)}$$

Rešenje.

- Domen je $(-\infty, 1)\bigcup(2, \infty)$.
- Nula funkcije je $x = \dfrac{1}{3}$.
- Prvi izvod je $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 1)}$

  Nule prvog izvoda su $x_1 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\sqrt{10}$; i $x_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}\sqrt{10}$, medjutim x_1 nije iz definicionog skupa tako da u tački $A(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{10}\,, 1,1253)$, funkcija ima lokalni maksimum.

  Funkcija raste kada je $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{10}\right)\bigcup(2, +\infty)$, a opada za $x \in \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{10}, 2\right)$.
- Drugi izvod je $f''(x) = -\dfrac{-15x^4 + 30x^2 - 30x + 13 + 6x^5}{(x^2 - 3x + 2)^2(x^2 + 1)^2}$.

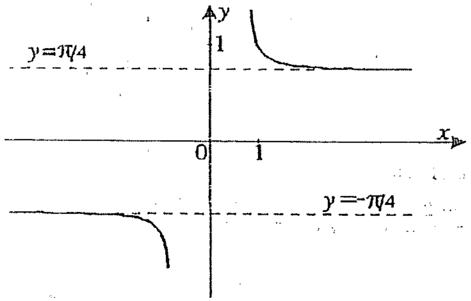
  Prevojna tačka je $B(-1,5166\,, 0,9864)$

  Funkcija f je konveksna za $x \in (-\infty, -1.5166)$.

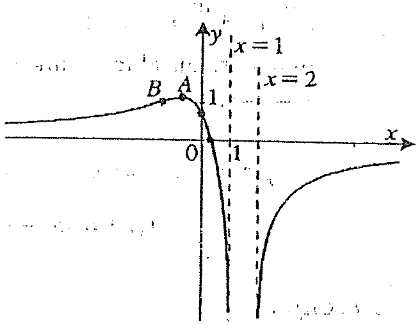
  Funkcija f je konkavna za $x \in (-1.5166, 1)\bigcup(2, \infty)$.
- Funkcija ima vertikalne asimptote $x = 1$ i $x = 2$, jer je

  $$\lim_{x\to1-}\ln\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to2+}\ln\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = -\infty.$$

  Ima horizontalnu asimptotu $x = 0$.



Sl. 6.14. $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{2}\text{arctg x}$



Sl. 6.15. $f(x) = \ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$

Glava 7

Ispitni zadaci iz Analize I za studente informatike, 1992–1996

januar 1992.

1. Ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \ln\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}$.

Rešenje. Videti zadatak 6.95 na strani 267.

2. Odrediti graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Rešenje.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos x}}}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}} = \frac{e^{\frac{1}{\cos 0}}}{e} = 1.$$

3. Odrediti dužinu luka astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Rešenje. Videti [11], strana 268.

4. Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x\cos^n x\,dx$,

te ga izraziti pomoću Beta–funkcije $B(p,q) = \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$.

Rešenje. Videti [11], strana 280.

5. Razviti u stepeni red funkciju $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$ i odrediti poluprečnik konvergencije.

Rešenje. Pošto je odredjivanje domena funkcije f, odnosno poluprečnika konvergencije R drugi deo zadatka, za sada ćemo sav račun formalno raditi na intervalu $x \in (-R, R)$. Važi $f'(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{g(x)}{x}$. Dakle,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Stepeni red uniformno konvergira na svakom zatvorenom podintervalu intervala $(-R, R)$, pa je

$$g(x) = g(0) + \int\limits_0^x g'(t)\,dt = \operatorname{arctg} 0 + \int\limits_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int\limits_0^x t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Koristeći prethodni rezultat računamo i razvoj funkcije f

$$f(x) = \int\limits_0^x \frac{g(t)}{t}\,dt = \int\limits_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{2n+1}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} x^{2n+1},$$

Preostaje da nadjemo poluprečnik konvergencije dobijenog reda.

Koristimo Košijevu formulu

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n+1]{2n+1}} = 1.$$

Prema tome poluprečnik konvergencije je $R = 1$.

mart 1992.

1. Ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = (x+2)^{2/3} - (x-2)^{2/3}$.

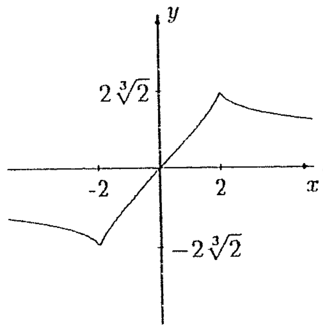
Rešenje. Domen funkcije je $\mathbf{R}$. Neparna je. Nula funkcije je $x = 0$.

U tački $A(-2, -\sqrt[3]{16})$ funkcija ima minimum. U tački $B(2, \sqrt[3]{16})$ funkcija ima maksimum.

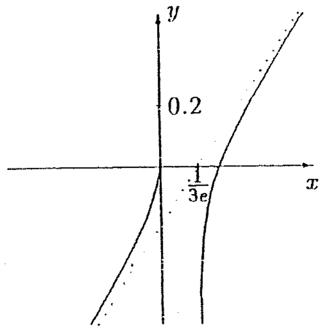
Funkcija f raste za $x \in (-2, 2)$, a opada za $x \in (-\infty, -2) \bigcup (2, \infty)$.

Horizontalna asimptota $y = 0$. Grafik je na slici 7.1.

2. Odrediti dužinu luka krive $y = a \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}$, za $0 \le x \le b$ i $a > b$.



Slika 7.1. $y = (x+2)^{2/3} - (x-2)^{2/3}$



Slika 7.2. $y = \frac{3x}{2} \ln \left(e - \frac{1}{3x}\right)$

Rešenje. Jednačinu krive možemo predstaviti u pogodnijem obliku $y = a(2 \ln a - \ln(a^2 - x^2))$. Dužina luka krive je

$$\ell = \int\limits_0^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int\limits_0^b \sqrt{1 + \left(-a \cdot \frac{-2x}{a^2 - x^2}\right)^2}\,dx$$

$$= \int\limits_0^b \sqrt{1 + \frac{4a^2x^2}{(a^2 - x^2)^2}}\,dx = \int\limits_0^b \sqrt{\frac{a^4 - 2a^2x^2 + x^4 + 4a^2x^2}{(a^2 - x^2)^2}}\,dx$$

$$= \int\limits_0^b \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}\,dx = \int\limits_0^b \frac{2a^2}{a^2 - x^2}\,dx - \int\limits_0^b \frac{a^2 - x^2}{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \int\limits_0^b a\frac{dx}{a+x}\,dx + \int\limits_0^b a\frac{dx}{a-x}\,dx - b = a \ln \frac{a+b}{a-b} - b.$$

3. Ispitati apsolutnu konvergenciju integrala $\int\limits_2^{\infty} \frac{(x+1)^a \sin x}{\ln x}\,dx$.

4. Izračunati površinu figure u ravni, ograničene funkcijama $f(x) = x$ i $g(x) = x + \sin^2 x$ na intervalu $[0, \pi]$.

Rešenje. Sabraćemo integrale sa zajedničkim intervalom integracije. Grafici funkcija f i g se seku u tačkama $(0,0)$ i (π, π), a nad intervalom $(0, \pi)$ grafik funkcije f je iznad grafika funkcije g. Zbog toga je tražena površina

$$P=\int_0^\pi (x+\sin^2 x)\,dx-\int_0^\pi x\,dx=\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi\right)=\frac{\pi}{2}.$$

5. Odrediti funkciju koju predstavlja stepeni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$ i odrediti poluprečnik konvergencije.

Rešenje. Da bismo se oslobodili razlomka pod sumom, naći ćemo drugi izvod funkcije $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2n(2n-1)x^{2n-2}}{n(2n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}2(-1)^{n-1}x^{2n-2}$$
$$=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{2}{1-(-x^2)}=\frac{2}{1+x^2}.$$

Računanjem primitivne funkcije dobijamo $f'(x)=2\operatorname{arctg}x$,

$$f(x)=2\int_0^x \operatorname{arctg}t\,dt=2t\operatorname{arctg}t\Big|_0^x-2\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\,dt=2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2).$$

Za poluprečnik konvergencije računamo

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[2n]{|a_{2n}|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}\right|}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2n]{2}}{\sqrt[2n]{2n}\,\sqrt[2n]{2n-1}}=1,$$

jer je

$$1\le\sqrt[2n]{2n-1}\le\sqrt[2n]{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1.$$

Poluprečnik konvergencije je $R=1$.

septembar 1992.

1. Ispitati funkciju $y=\frac{3x}{2}\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right)$.

Rešenje. Domen date funkcije je $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{3e},\infty\right)$. Nula funkcije je $x=\frac{1}{3(e-1)}$.

Prvi izvod funkcije f je $f'(x)=\frac{3}{2}\ln\left(e-\frac{1}{3x}\right)+\frac{3}{2x\,(3ex-1)}$.

Funkcija raste na $(-\infty,0)$ i $\left(\frac{1}{3e},+\infty\right)$. Drugi izvod je $f''(x)=-\frac{3}{2x\,(3ex-1)^2}$.

Funkcija je konveksna za $x<0$, a konkavna za $x>\frac{1}{3e}$.

Vertikalna asimptota je $x=\frac{1}{3e}$. Kosa asimptota $y=\frac{3x}{2}-\frac{1}{2e}$. Za grafik videti sliku 7.2.

2. Dato je $a>0$. Dokazati da jednačina $2x+\cos x=a+\frac{\sin a}{a}$ ima rešenja u intervalu $(0,a)$.

Rešenje. Funkcija f definisana sa $f(x)=x^2+\sin x$, $x\in[0,a]$, je neprekidna i diferencijabilna na intervalu $[0,a]$, pa ispunjava uslove za primenu Lagranžove teoreme. Lagranžova teorema garantuje egzistenciju rešenja na intervalu $(0,a)$ jednačine po x:

$$f'(x)=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}\quad\text{ili}\quad 2x+\cos x=\frac{a^2+\sin a}{a},$$

što je ekvivalentno datoj jednačini.

3. Neka je $I_n=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$.

(i) Pokazati da je $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

(ii) Odrediti I_6.

(iii) Pokazati da je $I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$.

Rešenje. (i) Imamo

$(\sin^{n-1}x\cos x)'=(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x-\sin^n x=(n-1)\sin^{n-2}x-n\sin^n x.$

Posle primene integrala nad intervalom $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ dobijamo

$$(n-1)I_{n-2}-nI_n=\left(\sin^{n-1}x\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0$$

odakle sledi tražena relacija.

(ii) Prvo računamo $I_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$, a zatim koristimo (i) da izračunamo I_6:

$$I_6 = \frac{5}{6}I_4 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}I_2 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0 = \frac{5\pi}{32}.$$

(iii) Koristićemo matematičku indukciju. Za $n = 0$ tvrdjenje važi na osnovu dokaza dobijenog pod (ii). Pretpostavimo da je broj $n \in \mathrm{N}_0$ izabran tako da važi $I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}$. Tada je

$$\begin{aligned} I_{2(n+1)} = I_{2n+2} &= \frac{2n+2-1}{2n+2}I_{2n+2-2} = \frac{2n+1}{2n+2}I_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2(n+1)-1)!!}{(2(n+1))!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

a to znači da tvrdjenje iz (iii) važi i u slučaju kada se n zameni izrazom $n+1$. Time je tvrdjenje pod (iii) dokazano indukcijom.

4. Ispitati konvergenciju integrala $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{px}}{x^q}\,dx$.

5. Izračunati sumu reda i odrediti poluprečnik konvergencije:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}. \tag{7.1}$$

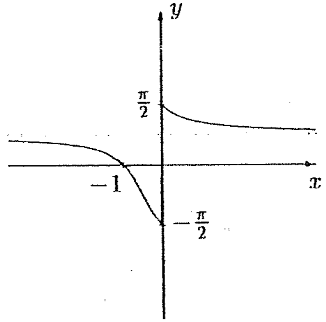
Rešenje. Neka je $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$. Tada je

$$(xf(x))'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)nx^{n-1}}{n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

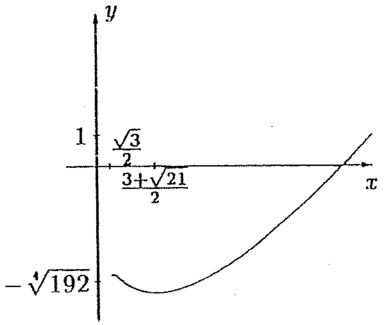
Odatle je $(xf(x))' = \int\limits_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln|1-x|$, odnosno

$$\begin{aligned} xf(x) &= -\int_0^x \ln|1-t|\,dt = -\left(t\ln|1-t|\Big|_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \frac{t}{1-t}\,dt\right) \\ &= -x\ln|1-x| - \int_0^x \frac{1-(1-t)}{1-t}\,dt = -x\ln|1-x| - \int_0^x \frac{dt}{1-t} + \int_0^x dt \\ &= -x\ln|1-x| + \ln|1-x| + x = x + (1-x)\ln|1-x|. \end{aligned}$$

Time dobijamo $f(x) = 1 + \frac{1-x}{x}\ln|1-x|$.



Slika 7.3. $y = \mathrm{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$



Slika 7.4. $y = \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}} - 4\sqrt{x}$

Poluprečnik konvergencije je $R = 1$:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = 1.$$

oktobar 1992.

1. Ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = \mathrm{arctg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Rešenje. Domen funkcije je $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Nula funkcije je $x = -1$.

Prvi izvod funkcije f je $f'(x) = -\frac{1}{2x^2+2x+1}$. Funkcija f opada na $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$.

Drugi izvod funkcije je $f''(x) = \frac{4x+2}{(2x^2+2x+1)^2}$. Funkcija f je konveksna za $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \bigcup (0, \infty)$, a konkavna za $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$. Prevojna tačka je za $x = -1/2$.

Nema vertikalne asimptote jer je $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$. Horizontalna asimptota je $y = \frac{\pi}{4}$. Grafik je prikazan na slici 7.3.

2. Dokazati nejednakost

$$\arccos x - \arccos y > y - x \quad \text{za} \quad -1 < x < y < 1.$$

Rešenje. Neka je z proizvoljno izabran broj iz intervala (x, y) i neka je funkcija $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definisana jednakošću

$$f(t) = \arccos t, \quad t \in [-1, 1].$$

Funkcija f je neprekidna na $[-1, 1]$ i ima izvod $f'(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ u svim tačkama $t \in (-1, 1)$. Primenjući Lagranževu teoremu dva puta, redom na intervalima $[x, z]$ i $[z, y]$, dolazimo do zaključka da postoje $\xi \in (x, z)$ i $\eta \in (z, y)$ tako da je

$$\begin{aligned} \arccos z - \arccos x &= f'(\xi)(z - x), \\ \arccos y - \arccos z &= f'(\eta)(y - z). \end{aligned}$$

Sabiranje ovih jednakosti daje

$$\arccos y - \arccos x = f'(\xi)(z - x) + f'(\eta)(y - z).$$

Primetimo da za prvi izvod funkcije f važi $f'(t) \le -1$ i pri tome je nejednakost uvek stroga ($f'(t) < -1$) izuzev u slučaju kada je $t = 0$. Odatle sledi

$$f'(\xi)(z - x) + f'(\eta)(y - z) \le (-1)(z - x) + (-1)(y - z),$$

pri čemu se jednakost dostiže jedino u slučaju $\xi = \eta = 0$. Medjutim, to je nemoguće, jer je $x < \xi < z < \eta < y$. Tako je dokazana stroga nejednakost

$$\arccos y - \arccos x < (-1)(z - x) + (-1)(y - z),$$

iz čega neposredno sledi se tražena nejednakost.

3. Izračunati površinu površi koja nastaje rotacijom oko x-ose dela krive $y = \sin x$ koji se nalazi izmedju tačaka sa apscisama $x = 0$ i $x = \pi$.

Rešenje. Uvešćemo smenu $\cos x = t$

$$P = \int_0^{\pi} 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2 \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx = -4\pi \int_1^0 \sqrt{1 + t^2}\, dt.$$

Za neodredjeni integral dobijamo

$$I = \int \sqrt{1 + t^2}\, dt = \int \frac{1 + t^2}{\sqrt{1 + t^2}}\, dt = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} + \int \frac{t^2}{\sqrt{1 + t^2}}\, dt.$$

Prvi sabirak se računa smenom $z = t + \sqrt{1 + t^2}$ iz koje se dobija

$$dz = \left(1 + \frac{2t}{2\sqrt{a + t^2}}\right) dt = \frac{t + \sqrt{1 + t^2}}{\sqrt{1 + t^2}}\, dt = \frac{z}{\sqrt{1 + t^2}}\, dt,$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C_1 = \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) + C_1.$$

Za drugi sabirak imamo

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2\, dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \int \frac{t}{2} \cdot \frac{2t}{\sqrt{1 + t^2}}\, dt &= \frac{t}{2} \cdot 2\sqrt{1 + t^2} - \int \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 + t^2}\, dt \\ &= t\sqrt{1 + t^2} - I. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u polaznu formulu dobijamo I:

$$\begin{aligned} I &= \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) + t\sqrt{1 + t^2} - I, \quad \text{ili} \\ I &= \frac{1}{2}\ln(t + \sqrt{1 + t^2}) + \frac{t}{2}\sqrt{1 + t^2} + C. \end{aligned}$$

Tražena površina je $P = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\, dt = 2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$.

4. Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $\int_0^{\infty} \dfrac{x^m \operatorname{arctg} x}{2 + x^n}\, dx$.

Rešenje. Videti zadatak 5.69 u [11].

5. Razviti funkciju $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x + 2}{x - 2}$ u stepeni red u okolini nule i odrediti poluprečnik konvergencije dobijenog reda.

Rešenje. Iz

$$y' = \frac{\dfrac{(x - 2) - (x + 2)}{(x - 2)^2}}{1 + \left(\dfrac{x + 2}{x - 2}\right)^2} = \frac{(x - 2) - (x + 2)}{(x - 2)^2 + (x + 2)^2} = \frac{4}{2x^2 + 8} = g(x),$$

razvojem u red

$$g(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} x^{2n}$$

i integracijom se dobija

$$y = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)2^{2n+1}} x^{2n+1}.$$

Za poluprečnik konvergencije imamo $R = 2$, jer je

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[2n+1]{2n + 1} \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

februar 1993.

1. Ispitati i nacrtati grafik funkcije $y = \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}} - 4\sqrt{x}$.

Rešenje. Domen funkcije je $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$. Nula funkcije je $x = 16.047$.

Prvi izvod je $f'(x) = -2\frac{-\sqrt{x^3} + \sqrt{4x^2 - 3}}{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{4x^2 - 3}}$. U tački $A(1, -\frac{15}{4})$ funkcija ima maksimum a za $x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$ minimum. Funkcija opada $x \in \left(1, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$, a raste $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}, \infty\right)$.

Prevojna tačka je za $x = 1.3721$. Nema asimptota. Grafik se nalazi na slici 7.4.

2. Dokazati nejednakosti $\ln 2e - \frac{2b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \ln\frac{2}{e} + \frac{a}{2b}$, ako je $0 < b < \frac{a}{2}$.

Rešenje. Da bismo transformisali nejednakosti, oduzećemo $\ln 2$ od sva tri izraza, svesti na zajednički imenilac i podeliti sa $a - 2b$:

$$1 - \frac{2b}{a} < \ln\frac{a}{b} - \ln 2 < -1 + \frac{a}{2b},$$

$$\frac{a - 2b}{a} < \ln a - \ln 2b < \frac{a - 2b}{2b},$$

$$\frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln 2b}{a - 2b} < \frac{1}{2b}.$$

Primenom Lagranžove teoreme na funkciju $f(x) = \ln x$ na intervalu $[2b, a]$ zaključujemo da važi

$$\frac{\ln a - \ln 2b}{a - 2b} = f'(\xi), \quad \text{za neko} \quad \xi \in (2b, a).$$

Funkcija $f'(x) = \frac{1}{x}$ je opadajuća na intervalu $x \in [2b, a]$ pa je $f'(a) < f'(\xi) < f'(2b)$, a to je upravo tražena nejednakost $\frac{1}{a} < \frac{\ln a - \ln 2b}{a - 2b} < \frac{1}{2b}$.

3. Izračunati

$$\int \frac{x - 1}{x^2} e^x \, dx.$$

Rešenje. Rastavljajući na zbir i koristeći parcijalnu integraciju dobijamo

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{x^2} e^x \, dx &= \int \frac{1}{x} e^x \, dx - \int \frac{1}{x^2} e^x \, dx \\ &= \int \frac{1}{x} e^x \, dx + \frac{1}{x} e^x - \int \frac{1}{x} e^x \, dx = \frac{1}{x} e^x + C.\end{aligned}$$

4. Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{\pi}{2} - x)^p \ln x}{\sin^q x} \, dx$.

Rešenje. Tačke nesvojstvenosti su oba kraja intervala integracije.

(i) Integral na intervalu $[0, 1]$. Koristeći $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\ln x} = 0$ dobijamo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^p \frac{1}{x^q}}{\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^p \ln x}{\sin^q x}} = 0$. Integral $(\frac{\pi}{2})^p \int\limits_0^1 x^{-q} \, dx$ divergira ako i samo ako je $-q \leq -1$. Prema tome, i (i) divergira ako je $q \geq 1$.

Preostaje slučaj $q < 1$. Izaberimo $\varepsilon > 0$ tako da je $q + \varepsilon < 1$ (na primer $\varepsilon = \frac{1 - q}{2}$). U narednom limesu koristi se $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}} = 0$, što je posledica Lopitalovog pravila: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{(\frac{\pi}{2} - x)^p \ln x}{x^q}}{\frac{(\frac{\pi}{2})^p x^{-\varepsilon}}{x^q}} = 0$. Integral $\left(\frac{\pi}{2}\right)^p \int\limits_0^1 x^{-q-\varepsilon} \, dx$ konvergira jer je $-q - \varepsilon > -1$. Prema tome i (i) konvergira u ovom slučaju.

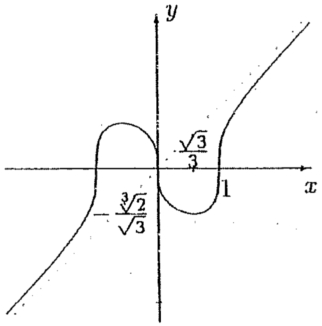
Time smo dokazali da za $q < 1$ integral (i) konvergira.

(ii) Integral na intervalu $[1, \pi/2]$. Koristeći $\frac{(\frac{\pi}{2} - x)^p \ln x}{\sin^q x} \sim \frac{(\frac{\pi}{2} - x)^p \ln \frac{\pi}{2}}{1^q}$, $x \to \pi/2$, kao i činjenicu da $\int\limits_1^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^p \left(\ln\frac{\pi}{2}\right) dx$ konvergira ako i samo ako je $p > -1$, zaključujemo da (ii) konvergira pod istim uslovom.

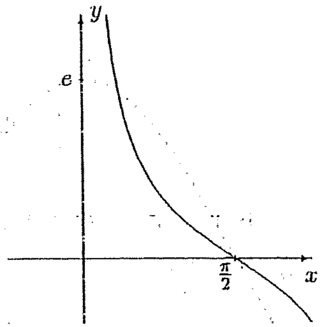
Integral dat u zadatku konvergira ako i samo ako je $p > -1$ i $q > 1$.

5. Izračunati zbir stepenog reda i odrediti oblast konvergencije

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}(n-1)!}.$$



Slika 7.5. $y = \sqrt[3]{x^3 - x}$



Slika 7.6. $y = \operatorname{ctg} x$ i $y = e\cos x$

Rešenje. Transformisanjem datog reda dobijamo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n n!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{2})^n}{n!} = x e^{\frac{x}{2}},$$

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n n!}}{\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

Dakle, poluprečnik konvergencije je $R = \infty$, pa je oblast konvergencije interval $(-\infty, \infty) = \mathbf{R}$.

april 1993.

1. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik: $y = \sqrt[3]{x^3 - x}$.

Rešenje. Domen funkcije je $\mathbf{R}$. Neparna je. Nule funkcije su $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

Prvi izvod je $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{3(\sqrt[3]{x^3 - x})^2}$ U tački $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ funkcija ima maksimum. U tački $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ funkcija ima minimum.

Funkcija f raste $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$, a opada $x \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

Drugi izvod je $f''(x) = -\dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{3x^2 + 1}{x(x^2 - 1)(\sqrt[3]{x^3 - x})^2}$. Funkcija je konveksna za $x < -1$, $0 < x < 1$, a konkavna za $-1 < x < 0$. Nema asimptota. Grafik je prikazan na slici 7.5.

2. Date su funkcije

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{e} \ln \frac{x}{e}, \quad x > 0; \\ g(x) &= \frac{3x}{2} \ln\left(e - \frac{1}{3x}\right), \quad x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{3e}, +\infty\right). \end{aligned}$$

(i) Naći minimum funkcije f.

(ii) Dokazati da jednačina $g'(x) = 0$ nema realnih rešenja. (Uputstvo: koristiti smenu $t = e - \frac{1}{3x}$.)

Rešenje.

(i) Da bismo našli minimum, naći ćemo prvi izvod funkcije. Važi

$$f(x) = \frac{x}{e} \ln \frac{x}{e} = \frac{x}{e}(\ln x - \ln e) = \frac{x \ln x - x}{e},$$

tako da je

$$f'(x) = \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{e} = \frac{1}{e} \ln x.$$

Jedina nula prvog izvoda je $x = 1$. Pošto je drugi izvod $f''(x) = \frac{1}{ex}$ očigledno pozitivan za $x > 0$, sledi da je traženi minimum $f(1) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$.

(ii) Nalaženjem prvog izvoda funkcije g, dolazimo do jednačine

$$\frac{3}{2} \ln\left(e - \frac{1}{3x}\right) + \frac{\frac{1}{2x}}{e - \frac{1}{3x}} = 0. \tag{7.2}$$

Uvedimo navedenu smenu

$$\frac{3}{2} \ln t + \frac{\frac{3}{2}(e - t)}{t} = 0, \quad \ln t + \frac{e}{t} - 1 = 0, \quad \frac{t}{e}(\ln t - 1) + 1 = 0,$$
$$\frac{t}{e} \ln \frac{t}{e} = -1.$$

Poslednja jednačina nema rešenja, jer izraz na levoj strani te jednačine ne može biti manji od $-\frac{1}{e}$ na osnovu (i). Prema tome ni jednačina (7.2) nema realnih rešenja.

3. Izračunati površinu figure u ravni ograničene krivama

$$y = \operatorname{ctg} x \quad \text{i} \quad y = e\cos x \quad (0 \le x \le \pi/2).$$

Rešenje. Tačku preseka krivih nalazimo rešavajući sistem jednačina po x i y (slika 7.6). Tako imamo

$$\operatorname{ctg} x = e\cos x, \quad \text{pa je} \quad x = \arcsin\frac{1}{e}.$$

Da bismo našli traženu površinu treba da izračunamo integral razlike

$$P = \int\limits_{\arcsin\frac{1}{e}}^{\frac{\pi}{2}} (e\cos x - \operatorname{ctg} x)\,dx = (e\sin x - \ln|\sin x|)\Big|_{\arcsin\frac{1}{e}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= e\sin\frac{\pi}{2} - \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| - e\cdot\frac{1}{e} + \ln\frac{1}{e} = e - 2.$$

4. Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $\int\limits_0^\infty \frac{x^a \sin^4 x}{(x-2)^b}\,dx$.

5. Odrediti funkciju koju predstavlja stepeni red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n(2n-1)}$ i izračunati poluprečnik konvergencije.

jun 1994.

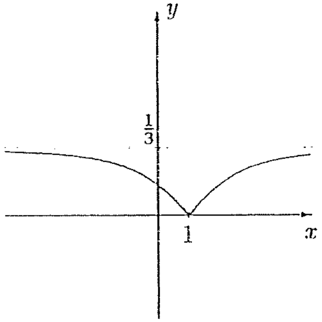
1. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik: $y = \dfrac{|1+x|}{3\sqrt{x^2-2x+5}}$.

Rešenje. Domen funkcije je $\mathbf{R}$, jer je $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 > 0$. Nula funkcije je $x = 1$. Prvi izvod je $f'(x) = -\dfrac{4}{3(x^2-2x+5)^{3/2}}$, $x < 1$ i $f'(x) = \dfrac{4}{3(x^2-2x+5)^{3/2}}$, $x > 1$. U tački $x = 1$ funkcija ima minimum.

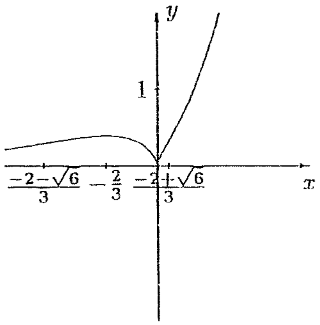
Funkcija raste $x \in (1, \infty)$ a opada $x \in (-\infty, 1)$.

Drugi izvod je $f''(x) = \dfrac{2x-2}{3(x^2-2x+5)^{5/2}}$, $x < 1$.

Ima horizontalnu asimptotu $y = 1/3$. Grafik je na slici 7.7.



Slika 7.7. $y = \dfrac{|1+x|}{3\sqrt{x^2-2x+5}}$



Slika 7.8. $y = x^{2/3}e^x$

2. Dokazati pomoću Lagranžove teoreme srednje vrednosti da jednačina

$$\frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x}{x^2} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{3}+1)\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\right)$$

ima bar jedno rešenje u intervalu $(1, \sqrt{3})$.

Rešenje. Funkcija $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$ je neprekidna i diferencijabilna na intervalu $[1, \sqrt{3}]$ i njen prvi izvod je $f'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x}{x^2}$. Kako je

$$\frac{f(\sqrt{3}) - f(1)}{\sqrt{3}-1} = \frac{1}{\sqrt{3}-1}\left(\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\operatorname{arctg} 1}{1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\cdot\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}(\sqrt{3}+1)\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\right),$$

te na osnovu Lagranžove teoreme odmah dobijamo tvrdjenje.

3. (i) Dokazati $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,dt$.

(ii) Izračunati $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$ uz korišćenje smene $x = \operatorname{tg} t$ i identiteta $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg} t=\frac{\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})}{\cos t}$.

Rešenje.

(i) Koristićemo smene $t+\frac{\pi}{4}=y$ i $y=\frac{\pi}{2}-z$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin y\,dy$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos z\,dz.$$

(ii) Sledeći uputstva imamo

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\operatorname{tg}t)}{1+\operatorname{tg}^2 t}\cdot(1+\operatorname{tg}^2 t)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt.$$

Primenom (i) dobijamo

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\,dt=\frac{\pi\ln 2}{8}.$$

4. Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $\int_0^{\infty}(\sqrt{x}e^x)^p\,dx$.

Rešenje. Tačke u kojima imamo nesvojstvenost su 0 i ∞ te dati nesvojstveni integral rastavljamo na dva integrala

$$\int_0^{\infty}(\sqrt{x}e^x)^p\,dx=\int_0^{1}(\sqrt{x}e^x)^p\,dx+\int_1^{\infty}(\sqrt{x}e^x)^p\,dx.$$

(i) Integral nad intervalom $[0,1]$. Iz $(\sqrt{x}e^x)^p\sim(\sqrt{x}\cdot 1)^p$, $x\to 0$ i poznatog kriterijuma za konvergenciju integrala $\int_0^1 x^{\frac{p}{2}}\,dx$ sledi da (i) konvergira

ako i samo ako je $\frac{p}{2}+1>0$, tj. $p>-2$.

(ii) Integral nad intervalom $[1,\infty)$.

(a) Slučaj $p\geq 0$. Koristeći $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{-1}}{(\sqrt{x}e^x)^p}=0$ i činjenicu da $\int_1^{\infty}x^{-1}\,dx$ divergira, zaključujemo da u ovom slučaju integral (ii) divergira.

(b) Slučaj $p<0$. Kako važi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x}e^x)^p}{x^{-2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{2+p/2}}{e^{-px}}=0$ i integral $\int_1^{\infty}x^{-2}\,dx$ konvergira, zaključujemo da u ovom slučaju integral (ii) konvergira.

Zaključak je da integral dat u tekstu zadatka konvergira ako i samo ako je $-2<p<0$.

5. Izračunati zbir stepenog reda i odrediti poluprečnik konvergencije: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2+2n+1)x^n$.

Rešenje. Uvedimo oznaku $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n^2+2n+1)x^n$. Neka je

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+2n+1)\frac{x^{n+1}}{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,$$

$$h(x)=\int_0^x\frac{g(t)}{t}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=-1+\frac{1}{1-x}.$$

Tada je $g(x)=xh'(x)=x\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)'=x\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$ i

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}-2x\cdot\frac{-1}{(1-x)^3}=\frac{1-x+2x}{(1-x)^3}=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Za poluprečnik konvergencije dobijamo $R=1$, jer je

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=1.$$

septembar 1994.

1. Ispitati funkciju i nacrtati grafik: $f(x) = -x + \ln\left(\frac{|x|-1}{x}\right)$.

2. Dokazati da jednačina $2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi}$ ima bar jedno rešenje u intervalu $x \in \left(\frac{1}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right)$.

Rešenje. Izvod funkcije $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, $x \in \left[\frac{1}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right]$, je $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. Takodje važi $f\left(\frac{4}{\pi}\right) - f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{16}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi^2}\sin\pi = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2}$. Funkcija f je neprekidna i diferencijabilna na intervalu $\left[\frac{1}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right]$. Primenom Lagranžove teoreme zaključujemo da postoji $c \in \left(\frac{1}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right)$ za koje važi $f'(c) = \frac{f\left(\frac{4}{\pi}\right) - f\left(\frac{1}{\pi}\right)}{\frac{4}{\pi} - \frac{1}{\pi}}$. Odatle sledi $2c\sin\frac{1}{c} - \cos\frac{1}{c} = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi}$, pa je c traženo rešenje jednačine u intervalu $\left(\frac{1}{\pi}, \frac{4}{\pi}\right)$. Primetimo da Lagranžova teorema obezbedjuje samo postojanje rešenja, ali ne i samo rešenje.

3. Za krivu $9y^2 = x(3-x)^2$ naći zapreminu tela nastalu obrtanjem petlje oko x-ose.

Rešenje. Postoje dve tačke preseka krive sa x-osom: $x = 0$ i $x = 3$, pa je tražena zapremina

$$V = \pi\int_0^3 y^2\,dx = \pi\int_0^3 \frac{x(3-x)^2}{9}\,dx = \pi\int_0^3 \frac{(3-t)t^2}{9}\,dt$$
$$= \pi\int_0^3 \frac{t^2}{3}\,dt - \pi\int_0^3 \frac{t^3}{9}\,dt = \frac{3}{4}.$$

4. Za koje $\alpha \in \mathrm{R}$ konvergira $I = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)^{\alpha} dx$? Izračunati I za $\alpha = 2$.

Rešenje. Očigledno je $x^2 + x + 1 > 0$ zbog $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

Integral je nesvojstven samo zbog neograničenog intervala integracije i

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-2\alpha}}{(x^2+x+1)^{-\alpha}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{\alpha} = 1.$$

Kako se integrali $\int_1^{+\infty} x^{-2\alpha}\,dx$ i $\int_{-\infty}^{-1}(x^2)^{-\alpha}\,dx$ mogu izraziti jednostavnom smenom jedan preko drugog, a konvergiraju ako i samo ako je $-2\alpha < -1$, sledi da polazni integral konvergira pod uslovom $\alpha > \frac{1}{2}$.

Smenama dobijamo $x + \frac{1}{2} = y$ i $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg} z$ dobijamo

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(y^2 + \frac{3}{4}\right)^{-2} dy$$
$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 z\,\frac{1}{\cos^2 z}\,dz = \frac{8\sqrt{3}}{9}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2z}{2}\,dz$$
$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}\left(\frac{z}{2} + \frac{\sin 2z}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}.$$

5. Razviti u stepeni red funkciju $y = \cos x + \operatorname{ch} x$, gde je $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, i odrediti poluprečnik konvergencije dobijenog reda.

Rešenje. Prvo ćemo razviti u red funkciju ch

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{2k})x^{2k}}{(2k)!} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{2k+1})x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Razvijamo u red i zadatu funkciju

$$y = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{2k})x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{2k+1})x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}.$$

Za poluprečnik konvergencije nalazimo

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[4n]{|a_{4n}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\sqrt[4]{2}}}{\sqrt[4n]{(4n)!}}.$$

Za svaki pozitivan broj ε važi $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\varepsilon^{-1})^n}{n!}=0$, pa postoji $n_0\in\mathbb{N}$ tako da je $(\varepsilon^{-1})^n<n!$ za $n>n_0$. Odatle sledi $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\varepsilon$, pa je $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$. Tako dobijamo $\dfrac{1}{R}=0$, te je $R=\infty$.

januar 1995.

1. Ispitati i nacrtati grafik: $f(x)=x^{2/3}e^x$.

Rešenje. Domen funkcije je $\mathbb{R}$. Nula funkcije je $x=0$.

Prvi izvod je $f'(x)=\dfrac{(2+3x)e^x}{3\sqrt[3]{x}}$. U tački $x=-\dfrac{2}{3}$ funkcija ima maksimum. U tački $x=0$ funkcija ima minimum.

Funkcija f raste $x\in\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right)\bigcup(0,\infty)$, a opada za $x\in(-\dfrac{2}{3},0)$.

Drugi izvod je $f''(x)=\dfrac{(-2+12x+9x^2)e^x}{9x\sqrt[3]{x}}$. Nule drugog izvoda $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{6}}{3}$ i $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{6}}{3}$. Funkcija je konveksna za $x<x_1$, $x>x_2$, a konkavna za $x_1<x<x_2$. Horizontalna asimptota $y=0$. Grafik je prikazan na slici 7.8.

2. Dokazati da funkcija

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

nije monotona ni na kom intervalu koji sadrži nulu.

Rešenje. Funkcija f je neparna pa je dovoljno dokazati da nije monotona ni na jednom intervalu oblika $(0,\varepsilon)$, jer svaki interval oko nule sadrži bar jedan od intervala oblika $(0,\varepsilon)$ ili $(-\varepsilon,0)$ za neko $\varepsilon>0$. Tvrdjenje zadatka dokazaćemo svodjenjem na protivrečnost. Na intervalu $(0,\varepsilon)$ funkcija je diferencijabilna i važi

$$f'(x)=\frac{1}{2}+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},\qquad x\in(0,\varepsilon).$$

Pretpostavimo da je f monotona na $(0,\varepsilon)$. Tada je

(i) ili $f'(x)>0$ za sve $x\in(0,\varepsilon)$,

(ii) ili $f'(x)<0$ za sve $x\in(0,\varepsilon)$.

Medjutim, $\cos\dfrac{1}{x}$ uzima obe vrednosti $+1$ i -1 u beskonačno mnogo tačaka iz intervala $(0,\varepsilon)$. Preciznije govoreći, niz $a_n=\dfrac{1}{n\pi}$, $n\in\mathbb{N}$, ima sledeće osobine: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $a_n>0$ i $\cos\dfrac{1}{a_n}=(-1)^n$. Odatle sledi da je $\sin\dfrac{1}{a_n}=0$, $f'(a_{2n})=\dfrac{1}{2}>0$ (ne važi (ii)) i $f'(a_{2n+1})=-\dfrac{3}{2}<0$ (ne važi (i)). Tako smo dobili kontradikciju i funkcija nije monotona na intervalu $(0,\varepsilon)$.

3. Izračunati zapreminu tela nastalog rotacijom dela krive $y=(2-x)\sqrt{1-x}$, $0\le x\le 1$ oko y-ose.

Rešenje. Funkcija, čiji je ova kriva grafik, je opadajuća na intervalu $x\in[0,1]$, jer je proizvod dve nenegativne opadajuće funkcije. Jednačinu krive upotrebićemo kao smenu u integralu

$$V=\int_0^1\pi x^2\,dy=\int_0^1\pi x^2y'\,dx.$$

Kako je $y'=\dfrac{3x-4}{2\sqrt{1-x}}$, uvodjenjem smene $1-x=t^2$ dobijamo

$$V=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{3x^3-4x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_1^0-\frac{3(1-t^2)^3-4(1-t^2)^2}{t}\cdot 2t\,dt$$

$$=\pi\int_0^1\Big(3(1-3t^2+3t^4-t^6)-4(1-2t^2+t^4)\Big)\,dt=-\frac{16\pi}{21}.$$

4. Ispitati apsolutnu konvergenciju integrala $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Rešenje. Treba da ispitamo konvergenciju integrala $\displaystyle\int_1^\infty\left|\frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}\right|dx$. Koristeći

$$\left|\frac{1-4\sin 2x}{x^3+\sqrt[3]{x}}\right|\le\frac{1+4\,|\sin 2x|}{x^3+x^3}\le\frac{5}{2}x^{-3},\qquad x\in(1,\infty)$$

i činjenicu da integral $\displaystyle\int_1^\infty\frac{5}{2}x^{-3}\,dx$ konvergira, zaključujemo da i polazni integral konvergira.

5. Razviti u stepeni red $f(x)=(\ln(1+x))^2$ i odrediti poluprečnik konvergencije.

Rešenje. Funkciju ćemo razviti u red množeći medjusobno sve sabirke dvaju redova i grupišući tako dobijene proizvode po stepenima od x

$$f(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}\right)^2 = x^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n\right)^2$$

$$= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} \cdot \frac{(-1)^k}{k+1}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(n-k+1)(k+1)}\right) x^{n+2}.$$

Sledi da je

$$a_0 = a_1 = 0 \quad \text{i} \quad a_{n+2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(n-k+1)(k+1)}, \quad n \in \mathrm{N},$$

pa je $|a_{n+2}| = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(n-k+1)(k+1)}$ zbir $n+1$ sabiraka od kojih je svaki veći od $\dfrac{1}{(n+1)^2}$ i manji od 1. Prema tome,

$$(n+1) \cdot \frac{1}{(n+1)^2} \leq |a_{n+2}| \leq (n+1) \cdot 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt[n+2]{n+2}} \leq \sqrt[n+2]{|a_{n+2}|} \leq \sqrt[n+2]{n+2}.$$

Odatle sledi da je poluprečnik konvergencije $R = 1$.

februar 1995.

1. Ispitati i nacrtati grafik: $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2+x}$.
2. Neka je $a \in \mathrm{R}$.
   (i) Pokazati da je funkcija $f(x) = x + \cos x - a$ rastuća.
   (ii) Dokazati da jednačina $x + \cos x = a$ nema pozitivnih korena ako je $a < 1$.
   (iii) Dokazati da jednačina $x + \cos x = a$ ima jedan pozitivan koren ako je $a > 1$.

Rešenje.

(i) Kako je $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$ sledi da je funkcija f rastuća.

(ii) Za $x \in \mathrm{R}$ važi $x + \cos x = a \iff f(x) = 0$ i $f(0) = 0 + 1 - a > 0$. Kada bi $x_1 > 0$ bio koren jednačine, važilo bi $f(x_1) = 0 < f(0)$, što je u suprotnosti sa (i).

(iii) Ovde važi

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 + 1 - a < 0, \\ f(a+1) &= a + 1 + \cos(a+1) - a = 1 + \cos(a+1) \geq 0. \end{aligned}$$

Iz neprekidnosti funkcije f na intervalu $[0, a+1]$ sledi da postoji bar jedan koren $x_1 \in (0, a+1]$. Ako bi postojala dva pozitivna korena $0 < x_2 < x_3$, tj. $f(x_2) = f(x_3) = 0$, iz monotonosti funkcije f sledilo bi $f(x) = 0$ za sve $x \in [x_2, x_3]$. To bi značilo i da je $1 - \sin x = f'(x) = 0$ za sve $x \in (x_2, x_3)$, što je nemoguće, jer sinus dostiže vrednost 1 samo u tačkama oblika $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathrm{Z}$.

3. Izračunati površinu figure ograničene krivama

$$x^2 = 4 + y \quad \text{i} \quad y = \frac{8}{x^2+4}.$$

Rešenje. Tačke preseka krivih dobijamo eliminišući y iz sistema jednačina

$$\frac{8}{x^2+4} = x^2 - 4, \quad \text{tj.} \quad x^4 = 24.$$

Obe krive su simetrične u odnosu na y-osu. Površina iznosi

$$P = 2 \int_0^{\sqrt[4]{24}} \left(\frac{8}{x^2+4} - (x^2-4)\right) dx = \left(8 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{2}{3}x^3 + 8x\right)\Bigg|_0^{\sqrt[4]{24}} =$$

$$8 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{24}}{2} - \frac{8}{3}\sqrt[4]{54} + 8\sqrt[4]{24}.$$

4. Ispitati konvergenciju integrala $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x}\, dx$.

Rešenje. Pokazaćemo da dati integral divergira. Pretpostavimo da dati integral konvergira. Onda bi konvergirali i sledeći integrali

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx + \int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin^2\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{y + \frac{\pi}{2}}\, dy, \end{aligned}$$

a takodje i $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x + \frac{\pi}{2}}\, dx$, jer je $0 \leq \dfrac{\sin^2 x}{x + \frac{\pi}{2}} \leq \dfrac{\sin^2 x}{x}$, za $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \infty\right]$. Odatle bi sledilo da konvergira i zbir

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x+\frac{\pi}{2}}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin^2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{y+\frac{\pi}{2}}\,dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin^2 x + \sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{x+\frac{\pi}{2}}\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x+\frac{\pi}{2}} = \int_{\pi}^{\infty} \frac{dx}{x}.$$

Medjutim, poznato je da poslednji integral divergira.

5. Razviti u stepeni red u okolini tačke $x = -\sin a$ funkciju $y = \dfrac{x\cos a}{1+2x\sin a + x^2}$ i odrediti poluprečnik konvergencije.

Rešenje. Funkciju ćemo razviti u okolini tačke $x = -\sin a$

$$y = \frac{x\cos a}{\cos^2 a + \sin^2 a + 2x\sin a + x^2} = \frac{x\cos a}{\cos^2 a + (x+\sin a)^2}$$

$$= \frac{x}{\cos a}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{x+\sin a}{\cos a}\right)^2} = \frac{-\sin a + x + \sin a}{\cos a}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{x+\sin a}{\cos a}\right)^2}$$

$$= \left(-\operatorname{tg} a + \frac{x+\sin a}{\cos a}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\left(\frac{x+\sin a}{\cos a}\right)^2\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\operatorname{tg} a\left(\frac{x+\sin a}{\cos a}\right)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x+\sin a}{\cos a}\right)^{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\operatorname{tg} a}{\cos^{2n} a}(x+\sin a)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\cos^{2n+1} a}(x+\sin a)^{2n+1}.$$

Za nalaženje poluprečnika konvergencije treba naći najveću tačku nagomilavanja niza koeficijenata datih sa dva reda zavisno od parnosti indeksa niza:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \max\left\{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[2n]{|a_{2n}|}, \limsup_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|}\right\}$$

$$= \max\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2n]{\operatorname{tg} a}}{\cos a}, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos a}\right\} = \frac{1}{\cos a}, \quad R = \cos a.$$

april 1995.

1. Ispitati funkciju i nacrtati grafik: $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

Rešenje. Videti zadatak 6.94.

2. Dokazati da jednačina $2x - \sin x = \dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{2}{\pi}$ ima bar jedno rešenje na intervalu $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Rešenje. Primenom Lagranžove teoreme na funkciju $f(x) = x^2 + \cos x$, $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, koja je neprekidna i diferencijabilna i pri tome je $f'(x) = 2x - \sin x$, zaključujemo da jednačina $f'(x) = \dfrac{f(\pi) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi - \frac{\pi}{2}}$ ima bar jedno rešenje u intervalu $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$. Kako važi

$$f(\pi) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi^2 + \cos\pi - \frac{\pi^2}{4} - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi^2}{4} - 1,$$

dolazimo do jednačine iz teksta zadatka.

3. Odrediti dužinu luka krive

$$y = a\ln\frac{a^2}{a^2 - x^2}, \quad x \in [0, b] \quad (\subseteq [0, a]).$$

4. Za koje a i b konvergira $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a}{1 - x^b\sin x}\,dx$?

5. Razviti funkciju $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$ u stepeni red i odrediti poluprečnik konvergencije.

Rešenje. Nalaženjem prvog izvoda $y' = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{1-x^2} = \dfrac{2}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ dobijamo da je traženi razvoj $y = \dfrac{2}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Poluprečnik konvergencije je $R = 1$:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{\frac{2}{3(2n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[2n+1]{2}}{\sqrt[2n+1]{3}\,\sqrt[2n+1]{2n+1}} = 1.$$

jun 1995.

1. Ispitati funkciju i nacrtati grafik $f(x) = (x+2)e^{1/x}$.

Rešenje. Videti sliku 6.9.

2. Dokazati da jednačina $\dfrac{\ln 2}{2} + \dfrac{1-x}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{4}$ ima bar jedno rešenje na intervalu $(0, 1)$.

Rešenje. Predstavimo jednačinu u ekvivalentnom obliku

$$\frac{1-x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\ln 2}{2}$$

i nadjimo primitivnu funkciju za funkciju na levoj strani jednačine

$$\int \frac{1-x}{1+x^2}\,dx=\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C=f(x)+C.$$

Funkcija f je neprekidna na $[0,1]$ i diferencijabilna je na intervalu $(0,1)$. Primenom Lagranžove teoreme zaključujemo da jednačina

$$\frac{1-x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}$$

ima bar jedno rešenje na intervalu $(0,1)$.

3. Dat je niz $I_n=\int\limits_0^{\infty} x^{n-1}e^{-x}\,dx$, $n\in\mathbb{N}$.

   (i) Dokazati

   $$I_n=(n-1)(n-2)\ldots(n-k)I_{n-k},\quad \text{za } k<n,\ k\in\mathbb{N}.$$

   (ii) Izračunati I_1 i I_6.

Rešenje. Videti [11], zadatak 5.71.

4. Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^p\ln(\sin x)\,dx$.

Rešenje. Koristićemo nejednakosti

$$\frac{2x}{\pi}\le \sin x\le x,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

$$\ln x-\ln\frac{\pi}{2}\le \ln\sin x\le \ln x,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

$$\ln\sin x\le -1,\quad x\in\left[0,\frac{1}{e}\right].$$

Za $p+1\le 0$ integral $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^p(-1)\,dx$ divergira, pa i $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^p\ln\sin x\,dx$ divergira.

Preostaje slučaj $p>-1$. Izaberimo $\varepsilon>0$ tako da važi $p-\varepsilon>-1$ (na primer $\varepsilon=\frac{p+1}{2}$). Tada iz

$$\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}\cdot\frac{\ln x-\ln\frac{\pi}{2}}{\ln x}\le\frac{\ln\sin x}{x^{-\varepsilon}}\le 0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}\cdot\frac{\ln x-\ln\frac{\pi}{2}}{\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}\cdot\left(1-\frac{\ln\frac{\pi}{2}}{\ln x}\right)=0\cdot(1-0)=0$$

i uz pomoć gore navedene nejednakosti sledi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^p\ln\sin x}{x^p\cdot x^{-\varepsilon}}=0$. Pošto $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^{p-\varepsilon}\,dx$ konvergira, zaključujemo da u ovom slučaju i $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^p\ln\sin x\,dx$ konvergira.

5. Odrediti poluprečnik konvergencije i ispitati konvergenciju na krajevima intervala konvergencije reda

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi(n^2-1)+\pi}{n+1}\right)}{\ln^2 n}x^n.$$

septembar 1995.

1. Ispitati funkciju i nacrtati grafik $f(x)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+(x+2)^2}}$.

2. Neka je

   $$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right),\quad n\in\mathbb{N},\quad a>0$$

   pri čemu je $x_1>0$ unapred dat realan broj. Dokazati da je

   $$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}.$$

Rešenje. Videti zadatak 3.60 c), strana 96.

3. Izračunati $I_n=\int\frac{dx}{x^n(1-x)}$, $n\in\mathbb{N}$.

Rešenje. Koristeći $I_n=\int\frac{1-(1-x)}{x^{n+1}(1-x)}\,dx=I_{n+1}-\frac{x^{-n}}{-n}$ zaključujemo da je

$$\begin{aligned}
I_{n+1}&=I_n-\frac{1}{nx^n},\\
I_n&=I_{n-1}-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}},\\
&\ \vdots\\
I_2&=I_1-\frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Sabiranjem se dobija

$$I_n = I_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{kx^k} = \ln\left|\frac{1-x}{x}\right| - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{kx^k} + C.$$

4. Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $\int\limits_0^\infty \frac{x^a \sin^2 x}{(x-1)^b}\,dx$ u zavisnosti od realnih parametara a i b.

Rešenje.

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^a \sin^2 x}{(x-1)^b}\,dx = \left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} + \int\limits_1^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}\right) \frac{x^a \sin^2 x}{(x-1)^b}\,dx:$$

(i) Prvi sabirak. Važi $\frac{x^a \sin^2 x}{(x-1)^b} \sim x^a \cdot x^2$, $x \to 0$. Integral $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{a+2}\,dx$ konvergira za $a > -3$.

(ii) Drugi i treći sabirak. Iz $\frac{x^a \sin^2 x}{(x-1)^b} \sim \frac{\sin^2 1}{(x-1)^b}$, $x \to 1$, dobijamo uslov $b < 1$. Primetimo da kod prvog i drugog sabirka imamo dodatni uslov za postojanje integrala da je b nesvodljiv razlomak čiji je imenilac neparan.

(iii) Četvrti sabirak. Najpre koristeći $\frac{x^a \sin^2 x}{(x-1)^b} \sim \frac{x^a \sin^2 x}{x^b}$, $x \to \infty$, svodimo ispitivanje ovog sabirka na ispitivanje integrala $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} x^{a-b} \sin^2 x\,dx$.

Zatim zaključujemo da važi $0 \le x^{a-b} \sin^2 x \le x^{a-b}$. U slučaju $a - b < -1$ integral $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} x^{a-b}\,dx$ konvergira, pa konvergira i $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} x^{a-b} \sin^2 x\,dx$. Preostaje još da razmotrimo slučaj $a - b \ge -1$.

U tom slučaju važi sledeći niz nejednakosti

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{3\pi}{4}} x^{a-b} \sin^2 x\,dx \ge \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{3\pi}{4}} x^{a-b} \sin^2 x\,dx$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{k\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{3\pi}{4}} (k\pi + \pi)^{-1} \cdot \frac{1}{2}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k+1},$$

pa ako bi posmatrani integral konvergirao, onda bi harmonijski red imao ograničen niz parcijalnih suma. Medjutim, kako znamo da harmonijski red divergira, sledi da i posmatrani integral divergira.

Zaključujemo da ako integral postoji, tj. ako je b razlomak sa neparnim imeniocem, onda integral konvergira ako i samo ako su ispunjena sledeća tri uslova: $a > -3$, $b < 1$ i $a - b < -1$. Ako je b iracionalan ili razlomak oblika $\frac{2p}{2q+1}$ $(p, q \in Z)$, podintegralna funkcija nije definisana na intervalu $(0, 1)$, pa ispitivanje konvergencije integrala nema smisla.

5. Funkciju

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} - x}{1 + x\sqrt{3}}$$

razviti u stepeni red i odrediti poluprečnik konvergencije. Koliko je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n\sqrt{3}(2n+1)}$?

Rešenje. Koristeći

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)} = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg} x\right)\right),$$

periodičnost funkcije tg i ograničenost funkcije arctg zaključujemo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg} x, & x > -\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ -\frac{2\pi}{3} - \operatorname{arctg} x, & x < -\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Razvijanjem u red prvog izvoda i integracijom dobićemo da na intervalu $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ važi, pod uslovom $x > -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (i naravno da red na desnoj strani jednakosti konvergira),

$$f(x) = \frac{\pi}{3} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Na ostatku domena funkcije f samo treba smanjiti slobodan član za π, što je period funkcije tg. Primenom Košijeve formule iz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{2n+1} = 1$ odmah sledi da je $R = 1$, što pokazuje da je tačka prekida u unutrašnjosti intervala konvergencije, pa u drugom delu zadatka treba biti pažljiv.

Za traženu sumu imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n\sqrt{3}(2n+1)} = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{\pi}{3} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}.$$

oktobar 1995.

1. Ispitati funkciju i nacrtati grafik $f(x) = \dfrac{1 + \ln|x|}{x(1 - \ln|x|)}$.

2. Dokazati da jednačina $x^2(e - \sqrt{e}) = e^{1/x}$ ima bar jedno rešenje na intervalu $(1,2)$.

Rešenje. Jednačina je ekvivalentna sa

$$\frac{1}{x^2}e^{1/x} = e - \sqrt{e}$$

pa se tvrdjenje zadatka može dobiti primenom Lagranžove teoreme na funkciju $f(x) = e^{1/x}$ na intervalu $[1,2]$.

3. Dat je integral $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

   (i) Naći vezu izmedju I_n i I_{n-1} (uputstvo: koristiti smenu $\frac{\pi}{4} - x = t$).

   (ii) Izračunati I_3.

Rešenje. (i) Koristićemo navedenu smenu

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t}\right)^{2n+1} dt = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n+1} t\, dt$$

Upotrebom smene $z = \operatorname{tg} t$, $dz = (1 + \operatorname{tg}^2 t)\, dt$ dobijamo traženu relaciju

$$I_n = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (-1 + 1 + \operatorname{tg}^2 t)\operatorname{tg}^{2n-1} t\, dt = -I_{n-1} - \int\limits_0^1 z^{2n-1}\, dz = -I_{n-1} - \frac{1}{2n}.$$

(ii) Imamo

$$I_0 = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos t}\, dt = \ln|\cos t|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\ln 2}{2},$$

pa koristeći formulu iz prvog dela zadatka dobijamo redom

$$\begin{aligned} I_1 &= -I_0 - \frac{1}{2} = \frac{\ln 2 - 1}{2}, \\ I_2 &= -I_1 - \frac{1}{4} = \frac{1 - 2\ln 2}{4}, \\ I_3 &= -I_2 - \frac{1}{6} = \frac{6\ln 2 - 5}{12}. \end{aligned}$$

4. U zavisnosti od parametra a ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala $\int\limits_0^{\infty} x^a \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) dx$.

Rešenje. Tačke nesvojstvenosti su 0 i ∞.

(i) Integral nad intervalom $[1,\infty)$. Važi $x^a \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) \sim x^a \cdot \dfrac{1}{x^2}$, $x \to \infty$, pa ovaj integral konvergira ako i samo ako je $a < 1$, jer je to uslov za konvergenciju integrala $\int\limits_1^{\infty} x^{a-2}\, dx$.

(ii) Integral nad intervalom $[0,1]$. Koristićemo sledeća dva limesa uz pretpostavku da je $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x^a}{x^a \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} &= 0, \\ \lim_{x\to 0} \frac{x^a \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^a \cdot x^{-\varepsilon}} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\ln(1 + t^2)}{t^{\varepsilon}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\varepsilon t^{\varepsilon - 1}} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{1 + t^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon t^{\varepsilon}} = 0. \end{aligned}$$

(a) Slučaj $a \le -1$. Integral $\int\limits_0^1 x^a\, dx$ divergira, pa je na osnovu prvog limesa i (ii) divergentan.

(b) Slučaj $a > -1$. Izaberimo $\varepsilon > 0$ tako da je $a - \varepsilon > -1$ (na primer $\varepsilon = \dfrac{a+1}{2}$). Ovog puta integral $\int\limits_0^1 x^{a-\varepsilon}\, dx$ konvergira, pa je i (ii) konvergentan.

Dati integral konvergira ako i samo ako je $a \in (-1, 1)$.

5. Funkciju $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$ razviti u stepeni red i odrediti poluprečnik konvergencije.

Rešenje. Primetimo da je $f(0) = 0$ i da za $x \neq 0$ važi

$$f'(x) = -\frac{-4x}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} = \frac{4x}{\sqrt{2x^2(2-2x^2)}} = \frac{2\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= 2\operatorname{sgn} x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n = 2\operatorname{sgn} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

Dakle, razvoj funkcije $f'(x)$ u okolini nule zavisi od toga da li je $x > 0$ ili $x < 0$, pa je to slučaj i sa $f(x)$

$$f(x) = 2\operatorname{sgn} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Koeficijenti koji učestvuju u razvoju su $a_{2n+1} = \dfrac{2\operatorname{sgn} x(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}$ i $a_{2n} = 0$, $n \in N_0$. Da bismo izračunali poluprečnik konvergencije imamo

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[2n+1]{2}}{\sqrt[2n+1]{2n+1}} \cdot \sqrt[2n+1]{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}} = 1,$$

jer je $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} < 1$ i $1 \cdot \dfrac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdots 2n} > 1$, odakle dobijamo $\dfrac{1}{2n+1} < \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < 1$. Dakle, $R = 1$.

januar 1996.

1. Ispitati funkciju i nacrtati grafik $f(x) = 2 - x + \sqrt{\dfrac{x^3}{3+x}}$.
2. Neka je $f : [0, 2] \to \mathbf{R}$ diferencijabilna funkcija i neka je f' rastuća u intervalu $(0, 2]$. Dokazati da je
$$f(x) \leq f(0) + xf'(2) \quad \text{za} \quad x \in (0, 2).$$

Rešenje. Dokazaćemo da je

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq f'(2).$$

Primenom Lagranžove teoreme dobija se da za neko $\xi \in (0, x) \subset (0, 2)$ važi

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi),$$

dok iz date monotonosti sledi $f'(\xi) \leq f'(2)$, što zajedno implicira traženo tvrdjenje.

3. Izračunati površinu ograničenu funkcijama
$$f(x) = e^x \quad \text{i} \quad g(x) = e^x + \sin^2 x$$
na intervalu $[0, \pi]$.

Rešenje. Površina je

$$P = \int_0^{\pi} (g(x) - f(x))\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

4. Za koje a i b konvergira $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a}{2 + x^b \sin x}\, dx$?

Rešenje. Važi

$$b \geq -1 \;\Rightarrow\; \frac{x^a}{2 + x^b \sin x} \sim x^a, \quad x \to 0,$$
$$b < -1 \;\Rightarrow\; \frac{x^a}{2 + x^b \sin x} \sim \frac{x^a}{x^b \cdot x}, \quad x \to 0,$$

pa integral konvergira ako i samo ako je

$$(b \geq -1 \text{ i } a > -1) \text{ ili } (b < -1 \text{ i } a - b - 1 > -1),$$

ili kraće ako i samo ako je $a > -1$ ili $a > b$.

5. Odrediti elementarni oblik funkcije definisane redom $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$ i naći poluprečnik konvergencije.

februar 1996.

1. Ispitati funkciju i nacrtati grafik $f(x) = x^{2/3} e^{-x}$.
2. Neka je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dva puta diferencijabilna funkcija i neka je $f''(x) < 0$. Dokazati da važi: $f(b) \geq f(a) + (b - a)f'(b)$, ako je $a < b$.

Rešenje. Uzastopnom primenom Lagranžove teoreme dobijamo ξ i η tako da je $a < \xi < \eta < b$ i

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \qquad \frac{f'(b) - f'(\xi)}{b - \xi} = f''(\eta) < 0.$$

Sledi $f'(b) < f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ i $f(b) \geq f(a) + (b - a)f'(b)$.

3. Izračunati zapreminu tela nastalog rotacijom krive

$$f(x) = (3 - x)\sqrt{2 - x}, \quad 0 \le x \le 2.$$

Rešenje. Primenom poznate formule dobijamo zapreminu

$$V = \int_0^2 \pi(3 - x)^2(2 - x)\,dx = \pi\int_0^2 (18 - 21x + 8x^2 - x^3)\,dx = \frac{34\pi}{10}.$$

4. Za koje a konvergira $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{(x^2 - x)^a}\,dx$?

Rešenje. Racionalisanjem dobijamo

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}},$$

pa za $x \in [1, \infty)$ važi

$$\frac{2}{3x} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 3x^2} + \sqrt{x^2}} \le \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \le \frac{2}{\sqrt{x^2+0} + 0} = \frac{2}{x}.$$

Preostaje nam još samo da ispitamo konvergenciju integrala $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{a+1}(x-1)^a}$. Rastavljanjem intervala integracije dobijamo da integral konvergira ako i samo ako je $a < 1$ i $2a + 1 > 1$, tj. kada je $a \in (0, 1)$.

5. Razviti u stepeni red funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} - \sin x\right), & x \ne 0 \\[2mm] \dfrac{1}{3}, & x = 0 \end{cases}$$

i odrediti poluprečnik konvergencije.

Rešenje. Primenom poznatih razvoja dobijamo (videti poglavlje 6.3.)

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \\ f(x) &= 2\left(\frac{1}{3!} + \frac{x^4}{7!} + \frac{x^8}{11!} + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{4n}}{(4n+3)!}. \end{aligned}$$

Da je poluprečnik konvergencije $R = \infty$ sledi iz $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(\varepsilon^{-1})^n}{n!} = 0$, gde je $\varepsilon > 0$ (uporediti sa zadatkom 5. iz septembra 1994, strana 287).

jun 1996.

1. Ispitati funkciju i nacrtati grafik $f(x) = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$.

2. Dokazati nejednakosti:

$$\frac{x}{1+x} \le \ln(1 + x) \le x, \quad x \ge 0.$$

Rešenje. U netrivijalnom slučaju $x > 0$ dovodjenjem nejednakosti na oblik

$$\frac{1}{1+x} \le \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} \le 1$$

i primenom Lagranžove teoreme na funkciju ln i interval $[1, 1+x]$, dobijamo tvrdjenje zadatka pozivanjem na monotono opadanje prvog izvoda. Interesantno je da se nejednakosti mogu dokazati i u slučaju $-1 < x < 0$ tako što se x zameni sa $\dfrac{1}{x+1} - 1$.

3. Izračunati dužinu luka krive

$$f(x) = \int_{-\pi/4}^{x} \sqrt{\cos t}\,dt \quad \text{nad intervalom} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right].$$

Rešenje. Primetimo da je $f'(x) = \sqrt{\cos x}$.

$$\begin{aligned} \ell = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \cos x}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = 2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 4\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8} = 4\sqrt{1 - \cos\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}. \end{aligned}$$

4. Ispitati konvergenciju u zavisnosti od parametara: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a}{\ln(e + x^b)}\,dx$.

Rešenje.

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{\ln(e + x^b)}\,dx = \int_0^1 \frac{x^a}{\ln(e + x^b)}\,dx + \int_1^\infty \frac{x^a}{\ln(e + x^b)}\,dx.$$

(i) Integral nad intervalom $[0, 1]$.

(a) Ako je $b \ge 0$, onda se podintegralna funkcija ponaša kao x^a kada x teži nuli, pa u tom slučaju integral (i) konvergira ako i samo ako je $a > -1$.

(b) Ako je $b < 0$ i $a > -1$ onda važi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^a}{\ln(e+x^b)}}{x^a} = 0$, pa integral konvergira, jer konvergira i $\int\limits_0^1 x^a\,dx$.

(c) Ako je $b < 0$ i $a \le -1$ onda koristimo $\dfrac{x^a}{\ln(e+x^b)} \ge \dfrac{x^{-1}}{\ln x^b}$ za $x \in (0,1]$. Smenom $\ln x = t$ dobijamo $\int\limits_0^{\frac{1}{e}} \dfrac{x^{-1}}{\ln x^b}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} \dfrac{1}{bt}\,dt$. Poslednji integral divergira, pa to važi i za (i).

(ii) Integral nad intervalom $[1,\infty)$. Analogno kao kod prethodnog integrala, razmatranjem slučajeva

(a) $b \le 0$,

(b) $b > 0$ i $a < -1$,

(c) $b > 0$ i $a \ge -1$,

zaključujemo da (ii) konvergira ako i samo ako je $a < -1$.

Polazni integral divergira za sve vrednosti parametara a i b.

5. Izračunati sumu stepenog reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$ i odrediti poluprečnik konvergencije.

Rešenje. Imamo

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = xg'(x),\\
g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = xh'(x),\\
h(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1, \quad g(x) = \frac{x}{(1-x)^2},\\
f(x) &= x\cdot\frac{(1-x)^2 - 2x(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

i

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 1.$$

avgust 1996.

1. Ispitati funkciju $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x} - 1 + 3x$.

2. Dokazati da jednačina ima bar jedno rešenje u intervalu $\left[\frac{1}{2},1\right]$:

$$\frac{\sqrt{x+1}-1}{4x\sqrt{x(x+1)}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1) - 1.$$

Rešenje. Treba primeniti Lagranževu teoremu na funkciju

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}, \quad x \in \left[\frac{1}{2},1\right].$$

Funkcija se nalazi integracijom transcedentne funkcije na levoj strani jednačine.

3. Neka je $I_n = \int\limits_{\sqrt{\ln 2}}^{1} x^n e^{-x^2}\,dx$ za $n \in \mathrm{N}$.

(i) Izraziti I_{n+1} preko I_{n-1}.

(ii) Izračunati I_1 i I_5.

Rešenje.

(i) Iz jednakosti

$$(x^n e^{-x^2})' = nx^{n-1}e^{-x^2} - 2x^{n+1}e^{-x^2}$$

integracijom dobijamo rekurentnu vezu

$$\frac{1}{e} - \sqrt{\ln^n 2}\,e^{-\ln 2} = nI_{n-1} - 2I_{n+1}, \quad I_{n+1} = \frac{n}{2}I_{n-1} - \frac{1}{2e} + \frac{\sqrt{\ln^n 2}}{2}.$$

(ii) I_1 se izračunava smenom $-x^2 = t$

$$I_1 = \int\limits_{\sqrt{\ln 2}}^{1} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\ln 2}^{-1} e^t\,dt = \frac{e-2}{4e}.$$

Koristeći rezultat prvog dela zadatka dobijamo

$$\begin{aligned}
I_3 &= I_1 - \frac{1}{2e} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{e-4}{4e} + \frac{\ln 2}{2},\\
I_5 &= 2I_3 - \frac{1}{2e} + \frac{\ln^2 2}{2} = \frac{e-5}{2e} + \ln 2 + \frac{\ln^2 2}{2}.
\end{aligned}$$

4. Ispitati konvergenciju nesvojstvenog integrala

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(e^{a/x}-1)^b}, \quad (a \ne 0).$$

Rešenje. Smenom $t = \dfrac{|a|}{x}$ se dobija

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(e^{a/x} - 1)^b} = \int_0^\infty \frac{|a|\; dt}{t^2(e^{t\,\mathrm{sgn}\,a} - 1)^b} = \int_0^1 \frac{|a|\; dt}{t^2(e^{t\,\mathrm{sgn}\,a} - 1)^b} + \int_1^\infty \frac{|a|\; dt}{t^2(e^{t\,\mathrm{sgn}\,a} - 1)^b}$$

Primetimo da ako je $a < 0$ i b nije nesvodljivi razlomak sa neparnim imeniocem, podintegralna funkcija nije definisana. Inače, iz $e^t - 1 \sim t$, $t \to 0$, sledi da prvi sabirak konvergira ako i samo ako je $b < -1$.

Drugi sabirak konvergira ako je $ab \geq 0$, jer je $t^2 \left|e^{t\,\mathrm{sgn}\,a} - 1)\right|^b \geq t^2(1 - e^{-1})^b$ za $t \geq 1$. Inače (tj. za $ab < 0$) divergira, jer je eksponencijalna funkcija veća od svakog polinoma, a ona se tada pojavljuje u brojiocu (uporediti sa (ii) u rešenju zadatka 4. iz juna 1994., strana 285).

Prema tome, integral konvergira ako i samo ako je $a < 0$ i $b < -1$, gde je b razlomak ranije navedenog oblika, a divergira ako je $a \geq 0$ i $b \geq -1$ i b je razlomak tog oblika.

5. Razviti u stepeni red $f(x) = \ln(1 - x + x^3 - x^4)$ i odrediti poluprečnik konvergencije.

Rešenje. Koristi se $f(x) = \ln(1 - x) + \ln(1 + x^3)$

$$f'(x) = \frac{-1}{1 - x} + \frac{3x^2}{1 + x^3} = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 3x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n},$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3 \cdot (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

gde je $a_0 = 0$, $a_{3n+1} = -\dfrac{1}{3n+1}$, $a_{3n+2} = -\dfrac{1}{3n+2}$, $a_{3n+3} = -\dfrac{3 \cdot (-1)^n - 1}{3n+3}$.

$$\frac{1}{R} = \max\left\{\lim_{n\to\infty} \sqrt[3n+1]{|a_{3n+1}|}, \lim_{n\to\infty} \sqrt[3n+2]{|a_{3n+2}|}, \limsup_{n\to\infty} \sqrt[3n+3]{|a_{3n+3}|}\right\}$$
$$= \max\{1, 1, 1\} = 1, \quad R = 1.$$

Literatura

[1] Adnadjević, D., Kadelburg, Z., *Matematička analiza*, Naučna knjiga, Beograd 1989.

[2] Demidovič, B. P. i saradnici, *Zadaci i riješeni primeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke*, Tehnička knjiga, Zagreb 1971.

[3] Doroslovački, R., *Elementi opšte i linearne algebre*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad 1997.

[4] Gajić, Lj., Pilipović, S., *Zbirka zadataka iz Analize I*, Drugi deo, Institut za matematiku, Novi Sad 1994.

[5] Kurepa, S., *Matematička analiza*, I, II, Tehnička knjiga, Zagreb 1977.

[6] Ljaško, I. I. i saradnici, *Spravočnoe posobie po matematičeskomu analizu*, I,II Viša škola, Kijev 1978, 1979 (na ruskom).

[7] Miličić, P., Uščumlić, M., *Zbirka zadataka iz više matematike I*, Naučna knjiga, Beograd 1988.

[8] Radenović, S., *Matematička analiza I*, Osnovi teorije, Pregled teorije i zadaci, Kragujevac 1995.

[9] Schmeelk, J., Takači, Dj., Takači, A., *Elementary Analysis through Examples and Exercises*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London 1995.

[10] Skokowski, E. W., *Calculus with Analytic Geometry*, Prindle, Weber and Schmidt, Boston, MA 1979.

[11] Takači, Dj., Takači, A., *Diferencijalni i integralni račun*, Univerzitet u Novom Sadu i Stylos, Novi Sad 1997.

[12] Zorič, V. A., *Matematičeskii analiz*, I, Nauka, Moskva 1981 (na ruskom).

Indeks

Abelova grupa, 16
adherencija skupa, 29
adherentna tačka, 29
apsolutna vrednost, 14
Arhimedova teorema, 21
asimptotsko ponašanje
    funkcije, 145
    niza, 105

Bernulijeva nejednakost, 9
bijekcija, 38
binomna formula, 8
binomni koeficijent, 8
Bolcano–Vajerštrasova teorema, 29
broj e, 88

Čebišev-Hermitov polinom, 216

definicioni skup funkcije, 37
Dekartov proizvod, 2
desna granična vrednost, 112
diferencijabilna funkcija, 186
diferencijal, 186
Dirihleova funkcija, 47, 156, 169
divergentan niz, 57
domen funkcije, 37
drugi izvod, 186

ekstrem, 238
ekstremne vrednosti funkcije, 238

funkcija, 37
    diferencijabilna, 186
    ekstremna vrednost, 40
    inverzna, 39
    monotono neopadajuća, 39
    monotono nerastuća, 39
    monotono opadajuća, 39
    monotono rastuća, 39
    neparna, 38
    neprekidna na skupu, 152
    neprekidnost u tački, 151
    ograničena, 38
    parna, 38
    periodična, 38
    složena, 38
    teži beskonačnosti, 112
    uniformno neprekidna, 174

grafik
    normala, 186
    tangenta, 186
grafik funkcije, 39
granična vrednost funkcije
    u $-\infty$, 112
    desna, 112
    leva, 112
    u $+\infty$, 112
    u tački, 111
granična vrednost niza, 57
grupa, 16

Hajne–Borelova osobina, 30
harmonijski niz, 73
Hausdorfov topološki prostor, 30
horizontalna asimptota, 142
Hornerova šema, 116

implicitna funkcija, 185
    prvi izvod, 185
infimum skupa, 18
injekcija, 38
interval, 18
    neograničen, 18
    ograničen, 18
    otvoren, 18
    zatvoren, 18
inverzna funkcija
    prvi izvod, 185
inverzna funkcija, 39
izolovana tačka skupa, 29
izvod
    desni, 183
    drugi, 186
    levi, 183
    prvi, 183
    treći, 186
izvod složene funkcije, 185

Jensenova nejednakost, 250

Košijev niz, 73
Košijeva teorema, 218
kodomen funkcije, 37
kompaktan skup, 29
kompletno uredjeno polje, 17
kompozicija funkcija, 38
komutativna grupa, 16
konkavna funkcija, 246
konveksna funkcija, 246
konvergentan niz, 57
kosa asimptota, 142
kritičan broj, 238

Lagerov polinom, 216
Lagranžova teorema, 213
leva granična vrednost, 112
limes
    inferior niza, 75
    superior niz, 75
lokalni
    ekstrem, 238
    maksimum, 39, 238
    minimum, 39, 238
Lopitalovo pravilo, 230

Maklorenova formula, 221
maksimum
    lokalni, 39
    strogi lokalni, 39
malo o, 106, 145
metrički prostor, 36
metrika, 36
minimum
    lokalni, 39
    strogi lokalni, 39
minimum skupa, 18
monotono opadajuća funkcija, 238
monotono rastuća funkcija, 238
monotonost funkcije, 238

najveći ceo, 22, 58
neparna funkcija, 38
neprekidna funkcija, 151
    u tački sa desne strane, 152
    u tački sa leve strane, 152
neprekidno proširenje funkcije, 182
neprekidnost
    složene funkcije, 152
    uniformna, 174
neprekidnost funkcije
    u tački, 151
nezavisno promenljiva, 37
niz, 57
    asimptotsko ponašanje, 105
    divergentan, 57
    divergentan u $+\infty$, 57
    divergentan u $-\infty$, 57
    granična vrednost, 57
    granica, 57

    Košijev, 73
    konvergentan, 57
    monotono neopadajući, 86
    monotono opadajući, 86
    monotono nerastući, 86
    monotono rastući, 86
    ograničen, 57
    opšti član, 57
    tačka nagomilavanja, 75
normala grafika funkcije, 186

ograničen niz, 57
ograničen skup, 29
ograničena funkcija, 38
Ojlerova konstanta, 92
okolina tačke, 28
osnovni period funkcije, 39
otvoren skup, 29
otvoreni pokrivač skupa, 30

parametarska funkcija, 185
    prvi izvod, 185
parna funkcija, 38
period funkcije, 39
periodična funkcija, 38
podniz, 75
    stacionarni, 75
pokrivač skupa, 30
polje, 17
prekid
    funkcije u tački – druge vrste, 152
    funkcije u tački – otklonjiv, 152
    funkcije u tački – prve vrste, 152
prevojna tačka, 246
princip matematičke indukcije, 5
priraštaj
    nezavisno promenljive, 183
    zavisno promenljive, 183
prvi izvod funkcije, 183, 186

rastojanje, 36
Rimanova funkcija, 170
Rolova teorema, 212
rubna tačka skupa, 29

skala rasta nizova, 107
skup, 1
    donje ograničenje, 18
    gornje ograničenje, 18
    infimum, 18
    kompaktan, 29
    minimum, 18
    ograničen, 18, 29
    ograničen odozdo, 18
    ograničen odozgo, 18
    otvoren, 29
    supremum, 18
    unutrašnjost, 29
    zatvoren, 29
skup vrednosti funkcije, 37
složena funkcija, 38
stacionarni podniz, 75
Stirlingova formula, 106
supremum skupa, 18
surjekcija, 38
Štolcova teorema, 102

tačka
    adherentna, 29
    unutrašnja, 29
tačka nagomilavanja
    niza, 75
    skupa, 29
tangenta grafika funkcije, 186
Tejlorov polinom, 221
Tejlorova formula, 221
teoreme srednje vrednosti, 212
topološki prostor, 28, 32

uniformna neprekidnost, 174
uniformno neprekidna funkcija, 182

unutrašnja tačka skupa, 29
uredjeni par, 2
uredjeno polje, 17

veliko *o*, 105, 145
vertikalna asimptota, 141
viši izvodi, 186

zatvaranje skupa, 29, 32
zatvoren skup, 29
zavisno promenljiva, 37